UNIVERSITÉ
CÔTE D'AZUR

Programmation impérative en Python

Cours 8. Ensembles, dictionnaires et matrices

Olivier Baldellon

Courriel : prénom.nom@univ-cotedazur.fr

Page professionnelle : https://upinfo.univ-cotedazur.fr/~obaldellon/

Licence 1 — Faculté des sciences et ingénierie de Nice — Université Côte d'Azur

- Il y aura pour les volontaires un projet Tk noté.

Concours Tk

- Il y aura pour les volontaires un projet Tk noté.
- La note sera un bonus

Concours Tk

- Il y aura pour les volontaires un projet Tk noté.
- La note sera un bonus
- Les règles et les objectifs :
  - seront données en détail la semaine prochaine.
  - Vous devez utiliser Python et Tk (et rien d'autre).

Concours Tk

- Il y aura pour les volontaires un projet Tk noté.
- La note sera un bonus
- Les règles et les objectifs :
  - seront données en détail la semaine prochaine.
  - Vous devez utiliser Python et Tk (et rien d'autre).
  - Votre code doit être lisible, propre et commenté.

- Il y aura pour les volontaires un projet Tk noté.
- La note sera un bonus
- Les règles et les objectifs :
  - seront données en détail la semaine prochaine.
  - Vous devez utiliser Python et Tk (et rien d'autre).
  - Votre code doit être lisible, propre et commenté.
  - Votre code doit être générique et paramétrable.

Concours Tk

- Il y aura pour les volontaires un projet Tk noté.
- La note sera un bonus
- Les règles et les objectifs :
  - seront données en détail la semaine prochaine.
  - Vous devez utiliser Python et Tk (et rien d'autre).
  - Votre code doit être lisible, propre et commenté.
  - Votre code doit être générique et paramétrable.
  - Votre code doit fonctionner sans problème sur les machines Linux du Petit Valrose.

Concours Tk

- Il y aura pour les volontaires un projet Tk noté.
- La note sera un bonus
- Les règles et les objectifs :
  - seront données en détail la semaine prochaine.
  - Vous devez utiliser Python et Tk (et rien d'autre).
  - Votre code doit être lisible, propre et commenté.
  - Votre code doit être générique et paramétrable.
  - Votre code doit fonctionner sans problème sur les machines Linux du Petit Valrose.
  - Date limite : date de l'examen final ?

Sommaire

- Partie I. Ensembles
- Partie II. Fonctions de hachage
- Partie III. Dictionnaires
- Partie IV. Mémoïsation
- Partie V. Matrices
- Partie VI. Table des matières

Type de données

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>>
```

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
```

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>>
```

Type de données

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL

```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
```

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>>
```

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
```

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Type de données

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Des types des séquences

SHELL
```
>>>
```

Type de données

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

```
SHELL
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Des types des séquences

```
SHELL
>>> type((1,2,3))
```

Type de données

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Des types des séquences

SHELL
```
>>> type((1,2,3))
<class 'tuple'>
>>>
```

Type de données

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Des types des séquences

SHELL
```
>>> type((1,2,3))
<class 'tuple'>
>>> type([11,1.2])
```

Type de données

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Des types des séquences

SHELL
```
>>> type((1,2,3))
<class 'tuple'>
>>> type([11,1.2])
<class 'list'>
>>>
```

Type de données

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Des types des séquences

SHELL
```
>>> type((1,2,3))
<class 'tuple'>
>>> type([11,1.2])
<class 'list'>
>>> type("Salut à toi")
```

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Des types des séquences

SHELL
```
>>> type((1,2,3))
<class 'tuple'>
>>> type([11,1.2])
<class 'list'>
>>> type("Salut à toi")
<class 'str'>
```

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Des types des séquences

SHELL
```
>>> type((1,2,3))
<class 'tuple'>
>>> type([11,1.2])
<class 'list'>
>>> type("Salut à toi")
<class 'str'>
```

- Nous allons voir deux autres types

SHELL
```
>>>
```

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Des types des séquences

SHELL
```
>>> type((1,2,3))
<class 'tuple'>
>>> type([11,1.2])
<class 'list'>
>>> type("Salut à toi")
<class 'str'>
```

- Nous allons voir deux autres types

SHELL
```
>>> type({1,2,3}) # Les ensembles
```

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Des types des séquences

SHELL
```
>>> type((1,2,3))
<class 'tuple'>
>>> type([11,1.2])
<class 'list'>
>>> type("Salut à toi")
<class 'str'>
```

- Nous allons voir deux autres types

SHELL
```
>>> type({1,2,3}) # Les ensembles
<class 'set'>
>>>
```

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Des types des séquences

SHELL
```
>>> type((1,2,3))
<class 'tuple'>
>>> type([11,1.2])
<class 'list'>
>>> type("Salut à toi")
<class 'str'>
```

- Nous allons voir deux autres types

SHELL
```
>>> type({1,2,3}) # Les ensembles
<class 'set'>
>>> type({'prix':1.2 , 'nom':'banane'}) # Les dictionnaires
```

- Nous avons eu l'occasion de voir plusieurs types de données.

Des types simples

SHELL
```
>>> type(-29)
<class 'int'>
>>> type(42.23)
<class 'float'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

Des types des séquences

SHELL
```
>>> type((1,2,3))
<class 'tuple'>
>>> type([11,1.2])
<class 'list'>
>>> type("Salut à toi")
<class 'str'>
```

- Nous allons voir deux autres types

SHELL
```
>>> type({1,2,3}) # Les ensembles
<class 'set'>
>>> type({'prix':1.2 , 'nom':'banane'}) # Les dictionnaires
<class 'dict'>
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre

Ensembles Python

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL
```
>>>
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL
```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL
```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
{1, 2, 3}
>>>
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL

```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
{1, 2, 3}
>>> { 1, 2, 3 } == { 3, 1, 2 } # ni ordre
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL

```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
{1, 2, 3}
>>> { 1, 2, 3 } == { 3, 1, 2 } # ni ordre
True
>>>
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL

```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
{1, 2, 3}
>>> { 1, 2, 3 } == { 3, 1, 2 } # ni ordre
True
>>> {False, 'bleu', 2, 'bleu'} == {2, False, 'bleu', 2, 2}
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL

```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
{1, 2, 3}
>>> { 1, 2, 3 } == { 3, 1, 2 } # ni ordre
True
>>> {False, 'bleu', 2, 'bleu'} == {2, False, 'bleu', 2, 2}
True
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL
```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
{1, 2, 3}
>>> { 1, 2, 3 } == { 3, 1, 2 } # ni ordre
True
>>> {False, 'bleu', 2, 'bleu'} == {2, False, 'bleu', 2, 2}
True
```

- L'ensemble vide est noté : `set()` (et non pas `{}` qui est un dictionnaire)

SHELL
```
>>>
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL
```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
{1, 2, 3}
>>> { 1, 2, 3 } == { 3, 1, 2 } # ni ordre
True
>>> {False, 'bleu', 2, 'bleu'} == {2, False, 'bleu', 2, 2}
True
```

- L'ensemble vide est noté : `set()` (et non pas `{}` qui est un dictionnaire)

SHELL
```
>>> type({})
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL
```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
{1, 2, 3}
>>> { 1, 2, 3 } == { 3, 1, 2 } # ni ordre
True
>>> {False, 'bleu', 2, 'bleu'} == {2, False, 'bleu', 2, 2}
True
```

- L'ensemble vide est noté : `set()` (et non pas `{}` qui est un dictionnaire)

SHELL
```
>>> type({})
<class 'dict'>
>>>
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL
```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
{1, 2, 3}
>>> { 1, 2, 3 } == { 3, 1, 2 } # ni ordre
True
>>> {False, 'bleu', 2, 'bleu'} == {2, False, 'bleu', 2, 2}
True
```

- L'ensemble vide est noté : `set()` (et non pas `{}` qui est un dictionnaire)

SHELL
```
>>> type({})
<class 'dict'>
>>> type(set())
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL
```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
{1, 2, 3}
>>> { 1, 2, 3 } == { 3, 1, 2 } # ni ordre
True
>>> {False, 'bleu', 2, 'bleu'} == {2, False, 'bleu', 2, 2}
True
```

- L'ensemble vide est noté : `set()` (et non pas `{}` qui est un dictionnaire)

SHELL
```
>>> type({})
<class 'dict'>
>>> type(set())
<class 'set'>
>>>
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL
```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
{1, 2, 3}
>>> { 1, 2, 3 } == { 3, 1, 2 } # ni ordre
True
>>> {False, 'bleu', 2, 'bleu'} == {2, False, 'bleu', 2, 2}
True
```

- L'ensemble vide est noté : `set()` (et non pas `{}` qui est un dictionnaire)

SHELL
```
>>> type({})
<class 'dict'>
>>> type(set())
<class 'set'>
>>> set()
```

- Un ensemble en Python est une collection finie d'objets
  - Une collection sans répétition et sans ordre
- Un ensemble n'est pas une séquence !
  - On ne peut pas accéder aux éléments via des indices. ~~`E[i]`~~
- Ils sont notés avec des accolades comme en mathématiques.

SHELL
```
>>> { 1, 2, 3, 1, 2 } # Ni répétition
{1, 2, 3}
>>> { 1, 2, 3 } == { 3, 1, 2 } # ni ordre
True
>>> {False, 'bleu', 2, 'bleu'} == {2, False, 'bleu', 2, 2}
True
```

- L'ensemble vide est noté : `set()` (et non pas `{}` qui est un dictionnaire)

SHELL
```
>>> type({})
<class 'dict'>
>>> type(set())
<class 'set'>
>>> set()
set()
```

Accès aux éléments d'un ensemble

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens

Accès aux éléments d'un ensemble

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens
  - Les éléments ne sont pas ordonnés : ils n'ont donc pas d'indice.

Accès aux éléments d'un ensemble

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens
  - Les éléments ne sont pas ordonnés : ils n'ont donc pas d'indice.

SHELL
```
>>>
```

Accès aux éléments d'un ensemble

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens
  - Les éléments ne sont pas ordonnés : ils n'ont donc pas d'indice.

SHELL

```
>>> E = { 22, 31.2, 'Salut', True }
```

Accès aux éléments d'un ensemble

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens
  - Les éléments ne sont pas ordonnés : ils n'ont donc pas d'indice.

SHELL

```
>>> E = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>>
```

Accès aux éléments d'un ensemble

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens
  - Les éléments ne sont pas ordonnés : ils n'ont donc pas d'indice.

SHELL

```
>>> E = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> E[2]
```

Accès aux éléments d'un ensemble

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens
  - Les éléments ne sont pas ordonnés : ils n'ont donc pas d'indice.

SHELL

```
>>> E = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> E[2]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  'set' object is not subscriptable
```

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens
  - Les éléments ne sont pas ordonnés : ils n'ont donc pas d'indice.

SHELL

```
>>> E = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> E[2]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  'set' object is not subscriptable
```

- On peut parcourir un ensemble avec une boucle for :

Accès aux éléments d'un ensemble

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens
  - Les éléments ne sont pas ordonnés : ils n'ont donc pas d'indice.

SHELL

```
>>> E = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> E[2]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  'set' object is not subscriptable
```

- On peut parcourir un ensemble avec une boucle for :
  - L'ordre n'est pas respecté (car il n'y a pas d'ordre !)

Accès aux éléments d'un ensemble

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens
  - Les éléments ne sont pas ordonnés : ils n'ont donc pas d'indice.

SHELL

```
>>> E = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> E[2]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  'set' object is not subscriptable
```

- On peut parcourir un ensemble avec une boucle for :
  - L'ordre n'est pas respecté (car il n'y a pas d'ordre !)

SHELL

```
>>>
```

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens
  - Les éléments ne sont pas ordonnés : ils n'ont donc pas d'indice.

SHELL
```
>>> E = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> E[2]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  'set' object is not subscriptable
```

- On peut parcourir un ensemble avec une boucle for :
  - L'ordre n'est pas respecté (car il n'y a pas d'ordre !)

SHELL
```
>>> for x in E:
```

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens
  - Les éléments ne sont pas ordonnés : ils n'ont donc pas d'indice.

SHELL
```
>>> E = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> E[2]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  'set' object is not subscriptable
```

- On peut parcourir un ensemble avec une boucle for :
  - L'ordre n'est pas respecté (car il n'y a pas d'ordre !)

SHELL
```
>>> for x in E:
...     print(x)
```

- La notation ~~`E[i]`~~ n'a pas de sens
  - Les éléments ne sont pas ordonnés : ils n'ont donc pas d'indice.

SHELL
```
>>> E = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> E[2]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  'set' object is not subscriptable
```

- On peut parcourir un ensemble avec une boucle for :
  - L'ordre n'est pas respecté (car il n'y a pas d'ordre !)

SHELL
```
>>> for x in E:
...     print(x)
True
Salut
22
31.2
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>>
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B
  - $A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x \in A, x \in B$

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B
  - $A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x \in A, x \in B$

- Traduisons cela en Python avec une boucle `for`

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B
  - $A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x \in A, x \in B$

- Traduisons cela en Python avec une boucle `for`

SCRIPT
```
def inclusion(A,B):
    for x in A:
        if not(x in B):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>>
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B
  - $A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x \in A, x \in B$

- Traduisons cela en Python avec une boucle `for`

SCRIPT
```
def inclusion(A,B):
    for x in A:
        if not(x in B):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> inclusion(A,B)
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B
  - $A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x \in A, x \in B$

- Traduisons cela en Python avec une boucle `for`

SCRIPT
```
def inclusion(A,B):
    for x in A:
        if not(x in B):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> inclusion(A,B)
True
>>>
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B
  - $A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x \in A, x \in B$

- Traduisons cela en Python avec une boucle `for`

SCRIPT
```
def inclusion(A,B):
    for x in A:
        if not(x in B):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> inclusion(A,B)
True
>>> inclusion(B,A)
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B
  - $A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x \in A, x \in B$

- Traduisons cela en Python avec une boucle `for`

SCRIPT
```
def inclusion(A,B):
    for x in A:
        if not(x in B):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> inclusion(A,B)
True
>>> inclusion(B,A)
False
>>>
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B
  - $A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x \in A, x \in B$

- Traduisons cela en Python avec une boucle `for`

SCRIPT
```
def inclusion(A,B):
    for x in A:
        if not(x in B):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> inclusion(A,B)
True
>>> inclusion(B,A)
False
>>> inclusion(A,A)
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B
  - $A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x \in A, x \in B$

- Traduisons cela en Python avec une boucle `for`

SCRIPT
```
def inclusion(A,B):
    for x in A:
        if not(x in B):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> inclusion(A,B)
True
>>> inclusion(B,A)
False
>>> inclusion(A,A)
True
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B
  - $A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x \in A, x \in B$

- Traduisons cela en Python avec une boucle `for`

SCRIPT
```
def inclusion(A,B):
    for x in A:
        if not(x in B):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> inclusion(A,B)
True
>>> inclusion(B,A)
False
>>> inclusion(A,A)
True
```

- Ou directement avec l'opérateur `<=` (si on veut l'inclusion stricte : `<`) :

SHELL
```
>>>
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B
  - $A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x \in A, x \in B$

- Traduisons cela en Python avec une boucle `for`

SCRIPT
```
def inclusion(A,B):
    for x in A:
        if not(x in B):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> inclusion(A,B)
True
>>> inclusion(B,A)
False
>>> inclusion(A,A)
True
```

- Ou directement avec l'opérateur `<=` (si on veut l'inclusion stricte : `<`) :

SHELL
```
>>> print( A<=B , B<=A , A<=A, A<A , set()<A)
```

- L'opérateur `in` permet de savoir si un élément appartient à un ensemble

SHELL
```
>>> A = {22, 'Salut'} ; B = { 22, 31.2, 'Salut', True }
>>> print( 31.2 in A , 31.2 in B)
False True
```

- En mathématiques, A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B
  - $A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x \in A, x \in B$

- Traduisons cela en Python avec une boucle `for`

SCRIPT
```
def inclusion(A,B):
    for x in A:
        if not(x in B):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> inclusion(A,B)
True
>>> inclusion(B,A)
False
>>> inclusion(A,A)
True
```

- Ou directement avec l'opérateur `<=` (si on veut l'inclusion stricte : `<`) :

SHELL
```
>>> print( A<=B , B<=A , A<=A, A<A , set()<A)
True False True False True
```

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT

```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL

```
>>>
```

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT

```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL

```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
```

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT

```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL

```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>>
```

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT

```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL

```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> {2,2,1,1,3,3,2,1,2,3} # ne contient bien que 3 éléments
```

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT

```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL

```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> {2,2,1,1,3,3,2,1,2,3} # ne contient bien que 3 éléments
{1, 2, 3}
>>>
```

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT

```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL

```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> {2,2,1,1,3,3,2,1,2,3} # ne contient bien que 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> cardinal(set())
```

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT

```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL

```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> {2,2,1,1,3,3,2,1,2,3} # ne contient bien que 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> cardinal(set())
0
```

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT
```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL
```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> {2,2,1,1,3,3,2,1,2,3} # ne contient bien que 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> cardinal(set())
0
```

- Comme d'habitude, on s'embête pour rien : fonction `len`

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT
```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL
```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> {2,2,1,1,3,3,2,1,2,3} # ne contient bien que 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> cardinal(set())
0
```

- Comme d'habitude, on s'embête pour rien : fonction `len`
  - C'est important pédagogiquement de savoir réécrire les fonctions de base.

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT
```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL
```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> {2,2,1,1,3,3,2,1,2,3} # ne contient bien que 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> cardinal(set())
0
```

- Comme d'habitude, on s'embête pour rien : fonction `len`
  - C'est important pédagogiquement de savoir réécrire les fonctions de base.

SHELL
```
>>>
```

Nombre d'éléments d'un ensemble

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT
```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL
```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> {2,2,1,1,3,3,2,1,2,3} # ne contient bien que 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> cardinal(set())
0
```

- Comme d'habitude, on s'embête pour rien : fonction `len`
  - C'est important pédagogiquement de savoir réécrire les fonctions de base.

SHELL
```
>>> len({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
```

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT
```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL
```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> {2,2,1,1,3,3,2,1,2,3} # ne contient bien que 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> cardinal(set())
0
```

- Comme d'habitude, on s'embête pour rien : fonction `len`
  - C'est important pédagogiquement de savoir réécrire les fonctions de base.

SHELL
```
>>> len({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>>
```

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT
```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL
```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> {2,2,1,1,3,3,2,1,2,3} # ne contient bien que 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> cardinal(set())
0
```

- Comme d'habitude, on s'embête pour rien : fonction `len`
  - C'est important pédagogiquement de savoir réécrire les fonctions de base.

SHELL
```
>>> len({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> len(set())
```

- En mathématiques, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

SCRIPT
```
def cardinal(E):
    c = 0
    for x in E:
        c=c+1
    return c
```

SHELL
```
>>> cardinal({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> {2,2,1,1,3,3,2,1,2,3} # ne contient bien que 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> cardinal(set())
0
```

- Comme d'habitude, on s'embête pour rien : fonction `len`
  - C'est important pédagogiquement de savoir réécrire les fonctions de base.

SHELL
```
>>> len({2,2,1,1,3,3,2,1,2,3})
3
>>> len(set())
0
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>>
```

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL

```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>>
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL

```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL

```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>>
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>>
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
[0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6]
>>>
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
[0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6]
>>> E = { x%10 for x in range(100) if x%6==0 }
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
[0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6]
>>> E = { x%10 for x in range(100) if x%6==0 }
>>>
```

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
[0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6]
>>> E = { x%10 for x in range(100) if x%6==0 }
>>> E # E est un ensemble
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
[0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6]
>>> E = { x%10 for x in range(100) if x%6==0 }
>>> E # E est un ensemble
{0, 2, 4, 6, 8}
```

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
[0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6]
>>> E = { x%10 for x in range(100) if x%6==0 }
>>> E # E est un ensemble
{0, 2, 4, 6, 8}
```

- On peut utiliser la fonction de conversion `set` (voir cours 5 page 18)

SHELL
```
>>>
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
[0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6]
>>> E = { x%10 for x in range(100) if x%6==0 }
>>> E # E est un ensemble
{0, 2, 4, 6, 8}
```

- On peut utiliser la fonction de conversion `set` (voir cours 5 page 18)

SHELL
```
>>> set('abc')
```

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
[0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6]
>>> E = { x%10 for x in range(100) if x%6==0 }
>>> E # E est un ensemble
{0, 2, 4, 6, 8}
```

- On peut utiliser la fonction de conversion `set` (voir cours 5 page 18)

SHELL
```
>>> set('abc')
{'b', 'a', 'c'}
>>>
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
[0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6]
>>> E = { x%10 for x in range(100) if x%6==0 }
>>> E # E est un ensemble
{0, 2, 4, 6, 8}
```

- On peut utiliser la fonction de conversion `set` (voir cours 5 page 18)

SHELL
```
>>> set('abc')
{'b', 'a', 'c'}
>>> set(['a','b','c'])
```

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
[0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6]
>>> E = { x%10 for x in range(100) if x%6==0 }
>>> E # E est un ensemble
{0, 2, 4, 6, 8}
```

- On peut utiliser la fonction de conversion `set` (voir cours 5 page 18)

SHELL
```
>>> set('abc')
{'b', 'a', 'c'}
>>> set(['a','b','c'])
{'b', 'a', 'c'}
>>>
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
[0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6]
>>> E = { x%10 for x in range(100) if x%6==0 }
>>> E # E est un ensemble
{0, 2, 4, 6, 8}
```

- On peut utiliser la fonction de conversion `set` (voir cours 5 page 18)

SHELL
```
>>> set('abc')
{'b', 'a', 'c'}
>>> set(['a','b','c'])
{'b', 'a', 'c'}
>>> set(('a','b','c'))
```

Construire un ensemble

- On peut construire un ensemble en donnant directement ses valeurs

SHELL
```
>>> E = {1 , 2 , 3 , 4}
>>> E
{1, 2, 3, 4}
```

- De même que les listes, on peut les construire par compréhension.

SHELL
```
>>> L = [ x%10 for x in range(100) if x%6==0 ]
>>> L # L est une liste
[0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6]
>>> E = { x%10 for x in range(100) if x%6==0 }
>>> E # E est un ensemble
{0, 2, 4, 6, 8}
```

- On peut utiliser la fonction de conversion `set` (voir cours 5 page 18)

SHELL
```
>>> set('abc')
{'b', 'a', 'c'}
>>> set(['a','b','c'])
{'b', 'a', 'c'}
>>> set(('a','b','c'))
{'b', 'a', 'c'}
```

Modifier un ensemble

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL
```
>>>
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

Modifier un ensemble

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

```shell
>>> E                # E contient 3 éléments
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL
```
>>> E              # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>>
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL
```
>>> E              # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL
```
>>> E              # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>>
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL
```
>>> E              # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E              # E contient maintenant 4 éléments
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL
```
>>> E                # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E                # E contient maintenant 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
>>>
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL

```
>>> E                # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E                # E contient maintenant 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
>>> E.add(1)
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL

```
>>> E                # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E                # E contient maintenant 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
>>> E.add(1)
>>>
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL
```
>>> E                # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E                # E contient maintenant 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
>>> E.add(1)
>>> E                # E contient toujours 4 éléments
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

```
>>> E                # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E                # E contient maintenant 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
>>> E.add(1)
>>> E                # E contient toujours 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
```
SHELL

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

```
>>>
```
SHELL

Modifier un ensemble

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

```
>>> E                  # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E                  # E contient maintenant 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
>>> E.add(1)
>>> E                  # E contient toujours 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
```
SHELL

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

```
>>> E = {'Salut',False,(1,2,3),'Ha ha ha'}
```
SHELL

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL
```
>>> E                # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E                # E contient maintenant 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
>>> E.add(1)
>>> E                # E contient toujours 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

SHELL
```
>>> E = {'Salut',False,(1,2,3),'Ha ha ha'}
>>>
```

Modifier un ensemble

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL
```
>>> E                # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E                # E contient maintenant 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
>>> E.add(1)
>>> E                # E contient toujours 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

SHELL
```
>>> E = {'Salut',False,(1,2,3),'Ha ha ha'}
>>> E.remove('HA ha ha')
```

Modifier un ensemble

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL
```
>>> E                # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E                # E contient maintenant 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
>>> E.add(1)
>>> E                # E contient toujours 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

SHELL
```
>>> E = {'Salut',False,(1,2,3),'Ha ha ha'}
>>> E.remove('HA ha ha')
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'HA ha ha'
>>>
```

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL
```
>>> E                # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E                # E contient maintenant 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
>>> E.add(1)
>>> E                # E contient toujours 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

SHELL
```
>>> E = {'Salut',False,(1,2,3),'Ha ha ha'}
>>> E.remove('HA ha ha')
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'HA ha ha'
>>> E
```

Modifier un ensemble

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL

```
>>> E              # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E              # E contient maintenant 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
>>> E.add(1)
>>> E              # E contient toujours 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

SHELL

```
>>> E = {'Salut',False,(1,2,3),'Ha ha ha'}
>>> E.remove('HA ha ha')
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'HA ha ha'
>>> E
{False, 'Ha ha ha', 'Salut', (1, 2, 3)}
>>>
```

- Les ensembles sont mutables : Cela signifie que l'on peut les modifier.
- On peut ajouter un élément avec la méthode `add`

SHELL
```
>>> E                # E contient 3 éléments
{1, 2, 3}
>>> E.add(12)
>>> E                # E contient maintenant 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
>>> E.add(1)
>>> E                # E contient toujours 4 éléments
{1, 2, 3, 12}
```

- On peut supprimer un élément avec la méthode `remove`

SHELL
```
>>> E = {'Salut',False,(1,2,3),'Ha ha ha'}
>>> E.remove('HA ha ha')
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'HA ha ha'
>>> E
{False, 'Ha ha ha', 'Salut', (1, 2, 3)}
>>> E.remove('Ha ha ha')
```

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>>
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>>
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>>
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>>
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

SHELL

```
>>>
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>>
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>>
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT

```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

SHELL

```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> A|B
```

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT
```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL
```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

SHELL
```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> A|B
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
```

SHELL
```
>>>
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT
```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL
```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

SHELL
```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> A|B
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
```

SHELL
```
>>> A&B
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT
```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL
```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

SHELL
```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> A|B
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
```

SHELL
```
>>> A&B
{2, 4}
>>>
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT
```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL
```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

SHELL
```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> A|B
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
```

SHELL
```
>>> A&B
{2, 4}
>>> A-B
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT
```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL
```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

SHELL
```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> A|B
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
```

SHELL
```
>>> A&B
{2, 4}
>>> A-B
{1, 3}
```

Opérations sur les ensembles

- On veut écrire l'union de deux ensembles.

SCRIPT
```
def union(A,B):
    E = set() # ensemble vide
    for x in A:
        E.add(x)
    for x in B:
        E.add(x)
    return E
```

SHELL
```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> union(A,B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> union(A,A)
{1, 2, 3, 4}
```

- Comme toujours, la fonction existe déjà sous Python !
  - L'union $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$ se note `A | B`
  - L'intersection $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$ se note `A & B`
  - La différence $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$ se note `A - B`

SHELL
```
>>> A={1,2,3,4}
>>> B={2,4,6,8}
>>> A|B
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
```

SHELL
```
>>> A&B
{2, 4}
>>> A-B
{1, 3}
```

- Exercice : écrire l'intersection et la différence sans utiliser d'opérateurs.

- Bonne question : essayons !

SHELL
```
>>>
```

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }                # str   : immuable
```

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }              # str   : immuable
{'123', 'abc'}
>>>
```

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }              # str   : immuable
{'123', 'abc'}
>>> { (1,2,3) , ('a','b','c') } # tuple : immuable
```

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }              # str   : immuable
{'123', 'abc'}
>>> { (1,2,3) , ('a','b','c') } # tuple : immuable
{(1, 2, 3), ('a', 'b', 'c')}
>>>
```

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }              # str   : immuable
{'123', 'abc'}
>>> { (1,2,3) , ('a','b','c') } # tuple : immuable
{(1, 2, 3), ('a', 'b', 'c')}
>>> { [1,2,3] , ['a','b','c'] } # list  : mutable
```

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }              # str   : immuable
{'123', 'abc'}
>>> { (1,2,3) , ('a','b','c') } # tuple : immuable
{(1, 2, 3), ('a', 'b', 'c')}
>>> { [1,2,3] , ['a','b','c'] } # list  : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'list'
>>>
```

Que puis-je mettre dans un ensemble ?

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }              # str   : immuable
{'123', 'abc'}
>>> { (1,2,3) , ('a','b','c') } # tuple : immuable
{(1, 2, 3), ('a', 'b', 'c')}
>>> { [1,2,3] , ['a','b','c'] } # list  : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'list'
>>> { {1,2,3} , {'a','b','c'} } # set : mutable
```

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }              # str   : immuable
{'123', 'abc'}
>>> { (1,2,3) , ('a','b','c') } # tuple : immuable
{(1, 2, 3), ('a', 'b', 'c')}
>>> { [1,2,3] , ['a','b','c'] } # list  : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'list'
>>> { {1,2,3} , {'a','b','c'} } # set : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'set'
```

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }              # str   : immuable
{'123', 'abc'}
>>> { (1,2,3) , ('a','b','c') } # tuple : immuable
{(1, 2, 3), ('a', 'b', 'c')}
>>> { [1,2,3] , ['a','b','c'] } # list  : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'list'
>>> { {1,2,3} , {'a','b','c'} } # set : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'set'
```

- Un ensemble est mutable, mais ses éléments doivent être immuable.

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }              # str   : immuable
{'123', 'abc'}
>>> { (1,2,3) , ('a','b','c') } # tuple : immuable
{(1, 2, 3), ('a', 'b', 'c')}
>>> { [1,2,3] , ['a','b','c'] } # list  : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'list'
>>> { {1,2,3} , {'a','b','c'} } # set : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'set'
```

- Un ensemble est mutable, mais ses éléments doivent être immuable.
  - On peut faire des ensembles de tuple (ensembles de points du plan)

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }              # str   : immuable
{'123', 'abc'}
>>> { (1,2,3) , ('a','b','c') } # tuple : immuable
{(1, 2, 3), ('a', 'b', 'c')}
>>> { [1,2,3] , ['a','b','c'] } # list  : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'list'
>>> { {1,2,3} , {'a','b','c'} } # set : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'set'
```

- Un ensemble est mutable, mais ses éléments doivent être immuable.
  - On peut faire des ensembles de tuple (ensembles de points du plan)
  - On ne peut pas faire des ensembles de listes ou d'ensemble.

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }              # str   : immuable
{'123', 'abc'}
>>> { (1,2,3) , ('a','b','c') } # tuple : immuable
{(1, 2, 3), ('a', 'b', 'c')}
>>> { [1,2,3] , ['a','b','c'] } # list  : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'list'
>>> { {1,2,3} , {'a','b','c'} } # set : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'set'
```

- Un ensemble est mutable, mais ses éléments doivent être immuable.
  - On peut faire des ensembles de tuple (ensembles de points du plan)
  - On ne peut pas faire des ensembles de listes ou d'ensemble.

- Que signifie *unhashable type* du message d'erreur ?

- Bonne question : essayons !

SHELL

```
>>> { '123' , 'abc' }              # str   : immuable
{'123', 'abc'}
>>> { (1,2,3) , ('a','b','c') } # tuple : immuable
{(1, 2, 3), ('a', 'b', 'c')}
>>> { [1,2,3] , ['a','b','c'] } # list  : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'list'
>>> { {1,2,3} , {'a','b','c'} } # set : mutable
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
TypeError:  unhashable type: 'set'
```

- Un ensemble est mutable, mais ses éléments doivent être immuable.
  - On peut faire des ensembles de tuple (ensembles de points du plan)
  - On ne peut pas faire des ensembles de listes ou d'ensemble.

- Que signifie *unhashable type* du message d'erreur ?
  - En interne, les ensembles utilisent des fonctions de hachage.

Sommaire

- Partie I. Ensembles
- Partie II. Fonctions de hachage
- Partie III. Dictionnaires
- Partie IV. Mémoïsation
- Partie V. Matrices
- Partie VI. Table des matières

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir
- Existe-il un équivalent numérique ?

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

SHELL
```
>>>
```

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

SHELL

```
>>> from hashlib import md5
```

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

SHELL

```
>>> from hashlib import md5
>>>
```

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

SHELL

```
>>> from hashlib import md5
>>> def h(x):
```

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

SHELL

```
>>> from hashlib import md5
>>> def h(x):
...     return md5(repr(x).encode()).hexdigest()
```

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

SHELL

```
>>> from hashlib import md5
>>> def h(x):
...     return md5(repr(x).encode()).hexdigest()
>>>
```

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

SHELL

```
>>> from hashlib import md5
>>> def h(x):
...     return md5(repr(x).encode()).hexdigest()
>>> h(3)
```

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

SHELL

```
>>> from hashlib import md5
>>> def h(x):
...     return md5(repr(x).encode()).hexdigest()
>>> h(3)
'eccbc87e4b5ce2fe28308fd9f2a7baf3'
>>>
```

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

SHELL

```
>>> from hashlib import md5
>>> def h(x):
...     return md5(repr(x).encode()).hexdigest()
>>> h(3)
'eccbc87e4b5ce2fe28308fd9f2a7baf3'
>>> h([1,2,3])
```

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.
- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

SHELL

```
>>> from hashlib import md5
>>> def h(x):
...     return md5(repr(x).encode()).hexdigest()
>>> h(3)
'eccbc87e4b5ce2fe28308fd9f2a7baf3'
>>> h([1,2,3])
'49a5a960c5714c2e29dd1a7e7b950741'
>>>
```

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.

- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

SHELL

```
>>> from hashlib import md5
>>> def h(x):
...     return md5(repr(x).encode()).hexdigest()
>>> h(3)
'eccbc87e4b5ce2fe28308fd9f2a7baf3'
>>> h([1,2,3])
'49a5a960c5714c2e29dd1a7e7b950741'
>>> h(min)
```

- Qu'est-ce qu'une empreinte digitale ?
  - C'est un marqueur biologique en théorie unique.
  - Facile à stocker, « facile » à comparer, facile à obtenir

- Existe-il un équivalent numérique ?
  - Une fonction de hashage permet de construire une empreinte numérique.

- Exemple : la fonction `md5`
  - Elle calcule une empreinte (*digest*) de 128 bits.
  - On représente l'empreinte le plus souvent par son écriture hexadécimale

SHELL

```
>>> from hashlib import md5
>>> def h(x):
...     return md5(repr(x).encode()).hexdigest()
>>> h(3)
'eccbc87e4b5ce2fe28308fd9f2a7baf3'
>>> h([1,2,3])
'49a5a960c5714c2e29dd1a7e7b950741'
>>> h(min)
'0f61485fd84d673c233e28e1d2a5acfe'
```

Pourquoi ?

- À quoi ces fonctions servent-elles ?

Pourquoi ?

- À quoi ces fonctions servent-elles ?
  - Elles permettent de créer un identifiant pour un objet quelconque.

Pourquoi ?

- À quoi ces fonctions servent-elles ?
  - Elles permettent de créer un identifiant pour un objet quelconque.
  - En particulier cela sert à comparer des données volumineuses.

- À quoi ces fonctions servent-elles ?
  - Elles permettent de créer un identifiant pour un objet quelconque.
  - En particulier cela sert à comparer des données volumineuses.
  - Sauriez-vous trouver la différence entre les deux chaînes ?

SHELL
```
>>> A='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> B='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>>
```

- À quoi ces fonctions servent-elles ?
  - Elles permettent de créer un identifiant pour un objet quelconque.
  - En particulier cela sert à comparer des données volumineuses.
  - Sauriez-vous trouver la différence entre les deux chaînes ?
  - Grâce à la fonction de hachage, la non-égalité est immédiate.

SHELL

```
>>> A='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> B='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> h(A)
```

- À quoi ces fonctions servent-elles ?
  - Elles permettent de créer un identifiant pour un objet quelconque.
  - En particulier cela sert à comparer des données volumineuses.
  - Sauriez-vous trouver la différence entre les deux chaînes ?
  - Grâce à la fonction de hachage, la non-égalité est immédiate.

SHELL

```
>>> A='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> B='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> h(A)
'c420125674824040 30e362f0c3813c15'
>>>
```

- À quoi ces fonctions servent-elles ?
  - Elles permettent de créer un identifiant pour un objet quelconque.
  - En particulier cela sert à comparer des données volumineuses.
  - Sauriez-vous trouver la différence entre les deux chaînes ?
  - Grâce à la fonction de hachage, la non-égalité est immédiate.

SHELL

```
>>> A='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> B='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> h(A)
'c420125674824040 30e362f0c3813c15'
>>> h(B)
```

- À quoi ces fonctions servent-elles ?
  - Elles permettent de créer un identifiant pour un objet quelconque.
  - En particulier cela sert à comparer des données volumineuses.
  - Sauriez-vous trouver la différence entre les deux chaînes ?
  - Grâce à la fonction de hachage, la non-égalité est immédiate.

SHELL
```
>>> A='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> B='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> h(A)
'c420125674824040 30e362f0c3813c15'
>>> h(B)
'e5a41e2edb893242fe25aad75dfcca66'
```

- À quoi ces fonctions servent-elles ?
  - Elles permettent de créer un identifiant pour un objet quelconque.
  - En particulier cela sert à comparer des données volumineuses.
  - Sauriez-vous trouver la différence entre les deux chaînes ?
  - Grâce à la fonction de hachage, la non-égalité est immédiate.

SHELL

```
>>> A='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> B='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> h(A)
'c420125674824040 30e362f0c3813c15'
>>> h(B)
'e5a41e2edb893242fe25aad75dfcca66'
```

- Soit `s1` et `s2` deux chaînes et `h(s1)` et `h(s2)` leurs empreintes.

- À quoi ces fonctions servent-elles ?
  - Elles permettent de créer un identifiant pour un objet quelconque.
  - En particulier cela sert à comparer des données volumineuses.
  - Sauriez-vous trouver la différence entre les deux chaînes ?
  - Grâce à la fonction de hachage, la non-égalité est immédiate.

SHELL
```
>>> A='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> B='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> h(A)
'c420125674824040 30e362f0c3813c15'
>>> h(B)
'e5a41e2edb893242fe25aad75dfcca66'
```

- Soit `s1` et `s2` deux chaînes et `h(s1)` et `h(s2)` leurs empreintes.
- On a la garantie suivante :
  - Si `h(s1)≠h(s2)` alors forcément `s1≠s2` (car `h` est une fonction)

- À quoi ces fonctions servent-elles ?
  - Elles permettent de créer un identifiant pour un objet quelconque.
  - En particulier cela sert à comparer des données volumineuses.
  - Sauriez-vous trouver la différence entre les deux chaînes ?
  - Grâce à la fonction de hachage, la non-égalité est immédiate.

SHELL
```
>>> A='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> B='12345678910111213141516171819202122232425262 7'
>>> h(A)
'c420125674824040 30e362f0c3813c15'
>>> h(B)
'e5a41e2edb893242fe25aad75dfcca66'
```

- Soit `s1` et `s2` deux chaînes et `h(s1)` et `h(s2)` leurs empreintes.
- On a la garantie suivante :
  - Si `h(s1)≠h(s2)` alors forcément `s1≠s2` (car `h` est une fonction)
- Les propriétés suivantes sont extrêmement probables :
  - Si `h(s1)=h(s2)` on peut en pratique considérer que `s1=s2` (on a 1 chance sur 340 282 366 920 938 463 463 374 607 431 768 211 455 de se tromper)
  - Si `s1` et `s2` sont très proches, `h(s1)` et `h(s2)` sont très différents.

Application aux ensembles

- Supposons que l'on souhaite implémenter les ensembles par des listes

Application aux ensembles

- Supposons que l'on souhaite implémenter les ensembles par des listes
  - On réimplémente les ensembles pour des questions pédagogiques

- Supposons que l'on souhaite implémenter les ensembles par des listes
  - On réimplémente les ensembles pour des questions pédagogiques

SCRIPT

```
def ajouter(L,x):
    for e in L:
        if x == e: return # terminaison car x est déjà dans L
    L.append(x) # sinon, on ajoute x
    return
```

- Supposons que l'on souhaite implémenter les ensembles par des listes
  - On réimplémente les ensembles pour des questions pédagogiques

SCRIPT

```
def ajouter(L,x):
    for e in L:
        if x == e: return # terminaison car x est déjà dans L
    L.append(x) # sinon, on ajoute x
    return
```

- Pour ajouter un élément, je dois comparer avec tous les éléments.

- Supposons que l'on souhaite implémenter les ensembles par des listes
  - On réimplémente les ensembles pour des questions pédagogiques

SCRIPT

```
def ajouter(L,x):
    for e in L:
        if x == e: return # terminaison car x est déjà dans L
    L.append(x) # sinon, on ajoute x
    return
```

- Pour ajouter un élément, je dois comparer avec tous les éléments.
  - S'il y a `n` éléments de taille `T`, il faudra faire `n*T` comparaisons.

- Supposons que l'on souhaite implémenter les ensembles par des listes
  - On réimplémente les ensembles pour des questions pédagogiques

SCRIPT
```
def ajouter(L,x):
    for e in L:
        if x == e: return # terminaison car x est déjà dans L
    L.append(x) # sinon, on ajoute x
    return
```

- Pour ajouter un élément, je dois comparer avec tous les éléments.
  - S'il y a `n` éléments de taille `T`, il faudra faire `n*T` comparaisons.

- Pour gagner en efficacité, on stocke chaque élément avec son empreinte.

- Supposons que l'on souhaite implémenter les ensembles par des listes
  - On réimplémente les ensembles pour des questions pédagogiques

SCRIPT
```
def ajouter(L,x):
    for e in L:
        if x == e: return # terminaison car x est déjà dans L
    L.append(x) # sinon, on ajoute x
    return
```

- Pour ajouter un élément, je dois comparer avec tous les éléments.
  - S'il y a `n` éléments de taille `T`, il faudra faire `n*T` comparaisons.

- Pour gagner en efficacité, on stocke chaque élément avec son empreinte.

SCRIPT
```
def ajouter(L,x):
    hx=h(x) # je calcule l'empreinte de x
    for e in L:
        (hy,y) = e # y est stocké avec son empreinte
        if hx == hy: return # le programme termine
    L.append((hx,x))
    return
```

- Supposons que l'on souhaite implémenter les ensembles par des listes
  - On réimplémente les ensembles pour des questions pédagogiques

SCRIPT
```
def ajouter(L,x):
    for e in L:
        if x == e: return # terminaison car x est déjà dans L
    L.append(x) # sinon, on ajoute x
    return
```

- Pour ajouter un élément, je dois comparer avec tous les éléments.
  - S'il y a `n` éléments de taille `T`, il faudra faire `n*T` comparaisons.

- Pour gagner en efficacité, on stocke chaque élément avec son empreinte.

SCRIPT
```
def ajouter(L,x):
    hx=h(x) # je calcule l'empreinte de x
    for e in L:
        (hy,y) = e # y est stocké avec son empreinte
        if hx == hy: return # le programme termine
    L.append((hx,x))
    return
```

- Dorénavant je dois faire seulement `N` comparaisons d'empreintes.

- Dans Python

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.

Résumé

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.
  - Mais ils utilisent des tables de hachage.

Résumé

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.
  - Mais ils utilisent des tables de hachage.
  - L'ajout d'élément ne dépend pas de la taille des éléments de E.

Résumé

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.
  - Mais ils utilisent des tables de hachage.
  - L'ajout d'élément ne dépend pas de la taille des éléments de E.
- En informatique en général : on utilise les empreintes

Résumé

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.
  - Mais ils utilisent des tables de hachage.
  - L'ajout d'élément ne dépend pas de la taille des éléments de E.
- En informatique en général : on utilise les empreintes
  - pour vérifier qu'un téléchargement correspond au bon fichier

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.
  - Mais ils utilisent des tables de hachage.
  - L'ajout d'élément ne dépend pas de la taille des éléments de E.
- En informatique en général : on utilise les empreintes
  - pour vérifier qu'un téléchargement correspond au bon fichier
    - On compare les empreintes (*MD5 check sum*)

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.
  - Mais ils utilisent des tables de hachage.
  - L'ajout d'élément ne dépend pas de la taille des éléments de E.
- En informatique en général : on utilise les empreintes
  - pour vérifier qu'un téléchargement correspond au bon fichier
    - On compare les empreintes (*MD5 check sum*)
    - Si l'empreinte est bonne, on a bien une version correcte du bon fichier

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.
  - Mais ils utilisent des tables de hachage.
  - L'ajout d'élément ne dépend pas de la taille des éléments de E.
- En informatique en général : on utilise les empreintes
  - pour vérifier qu'un téléchargement correspond au bon fichier
    - On compare les empreintes (*MD5 check sum*)
    - Si l'empreinte est bonne, on a bien une version correcte du bon fichier
  - pour stocker des mots de passe sans les révéler.

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.
  - Mais ils utilisent des tables de hachage.
  - L'ajout d'élément ne dépend pas de la taille des éléments de E.
- En informatique en général : on utilise les empreintes
  - pour vérifier qu'un téléchargement correspond au bon fichier
    - On compare les empreintes (*MD5 check sum*)
    - Si l'empreinte est bonne, on a bien une version correcte du bon fichier
  - pour stocker des mots de passe sans les révéler.
    - On stocke les empreintes

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.
  - Mais ils utilisent des tables de hachage.
  - L'ajout d'élément ne dépend pas de la taille des éléments de E.
- En informatique en général : on utilise les empreintes
  - pour vérifier qu'un téléchargement correspond au bon fichier
    - On compare les empreintes (*MD5 check sum*)
    - Si l'empreinte est bonne, on a bien une version correcte du bon fichier
  - pour stocker des mots de passe sans les révéler.
    - On stocke les empreintes
    - On compare avec l'empreinte du mot de passe fourni par l'utilisateur.

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.
  - Mais ils utilisent des tables de hachage.
  - L'ajout d'élément ne dépend pas de la taille des éléments de E.
- En informatique en général : on utilise les empreintes
  - pour vérifier qu'un téléchargement correspond au bon fichier
    - On compare les empreintes (*MD5 check sum*)
    - Si l'empreinte est bonne, on a bien une version correcte du bon fichier
  - pour stocker des mots de passe sans les révéler.
    - On stocke les empreintes
    - On compare avec l'empreinte du mot de passe fourni par l'utilisateur.
    - À aucun moment on ne stocke les mots de passe

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.
  - Mais ils utilisent des tables de hachage.
  - L'ajout d'élément ne dépend pas de la taille des éléments de E.
- En informatique en général : on utilise les empreintes
  - pour vérifier qu'un téléchargement correspond au bon fichier
    - On compare les empreintes (*MD5 check sum*)
    - Si l'empreinte est bonne, on a bien une version correcte du bon fichier
  - pour stocker des mots de passe sans les révéler.
    - On stocke les empreintes
    - On compare avec l'empreinte du mot de passe fourni par l'utilisateur.
    - À aucun moment on ne stocke les mots de passe
    - Une empreinte ne permet pas de retrouver le mot de passe

- Dans Python
  - Les ensembles sont implémentés de manière bien plus élaborées.
  - Mais ils utilisent des tables de hachage.
  - L'ajout d'élément ne dépend pas de la taille des éléments de E.
- En informatique en général : on utilise les empreintes
  - pour vérifier qu'un téléchargement correspond au bon fichier
    - On compare les empreintes (*MD5 check sum*)
    - Si l'empreinte est bonne, on a bien une version correcte du bon fichier
  - pour stocker des mots de passe sans les révéler.
    - On stocke les empreintes
    - On compare avec l'empreinte du mot de passe fourni par l'utilisateur.
    - À aucun moment on ne stocke les mots de passe
    - Une empreinte ne permet pas de retrouver le mot de passe
  - pour certifier la liste chaînée d'une *blockchain* (bitcoin) ou de git.

Sommaire

- Partie I. Ensembles
- Partie II. Fonctions de hachage
- Partie III. Dictionnaires
- Partie IV. Mémoïsation
- Partie V. Matrices
- Partie VI. Table des matières

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>>
```

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
```

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>>
```

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL

```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
```

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL

```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
{'pommes': 243, 'poires': 123}
```

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
{'pommes': 243, 'poires': 123}
```

- On accède aux valeurs en utilisant les clés comme indices.

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
{'pommes': 243, 'poires': 123}
```

- On accède aux valeurs en utilisant les clés comme indices.

SHELL
```
>>>
```

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
{'pommes': 243, 'poires': 123}
```

- On accède aux valeurs en utilisant les clés comme indices.

SHELL
```
>>> mon_panier['poires']
```

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
{'pommes': 243, 'poires': 123}
```

- On accède aux valeurs en utilisant les clés comme indices.

SHELL
```
>>> mon_panier['poires']
123
>>>
```

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
{'pommes': 243, 'poires': 123}
```

- On accède aux valeurs en utilisant les clés comme indices.

SHELL
```
>>> mon_panier['poires']
123
>>> mon_panier['pommes']
```

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
{'pommes': 243, 'poires': 123}
```

- On accède aux valeurs en utilisant les clés comme indices.

SHELL
```
>>> mon_panier['poires']
123
>>> mon_panier['pommes']
243
```

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
{'pommes': 243, 'poires': 123}
```

- On accède aux valeurs en utilisant les clés comme indices.

SHELL
```
>>> mon_panier['poires']
123
>>> mon_panier['pommes']
243
```

- Un dictionnaire vide se note `{}` ou mieux `dict()`

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
{'pommes': 243, 'poires': 123}
```

- On accède aux valeurs en utilisant les clés comme indices.

SHELL
```
>>> mon_panier['poires']
123
>>> mon_panier['pommes']
243
```

- Un dictionnaire vide se note `{}` ou mieux `dict()`
- Toutes les clés doivent être distinctes

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
{'pommes': 243, 'poires': 123}
```

- On accède aux valeurs en utilisant les clés comme indices.

SHELL
```
>>> mon_panier['poires']
123
>>> mon_panier['pommes']
243
```

- Un dictionnaire vide se note `{}` ou mieux `dict()`

- Toutes les clés doivent être distinctes

SHELL
```
>>>
```

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
{'pommes': 243, 'poires': 123}
```

- On accède aux valeurs en utilisant les clés comme indices.

SHELL
```
>>> mon_panier['poires']
123
>>> mon_panier['pommes']
243
```

- Un dictionnaire vide se note `{}` ou mieux `dict()`

- Toutes les clés doivent être distinctes

SHELL
```
>>> {'pommes':243 , 'poires':123, 'pommes':23 }
```

- Un dictionnaire est une collection de couples `clé:valeur`.
  - `clé` est forcément non mutable ;
  - `valeur` peut être modifiée.

SHELL
```
>>> mon_panier = {'pommes':243 , 'poires':123 }
>>> mon_panier
{'pommes': 243, 'poires': 123}
```

- On accède aux valeurs en utilisant les clés comme indices.

SHELL
```
>>> mon_panier['poires']
123
>>> mon_panier['pommes']
243
```

- Un dictionnaire vide se note `{}` ou mieux `dict()`

- Toutes les clés doivent être distinctes

SHELL
```
>>> {'pommes':243 , 'poires':123, 'pommes':23 }
{'pommes': 23, 'poires': 123}
```

Accès aux éléments

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.

Accès aux éléments

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.

Accès aux éléments

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage

Accès aux éléments

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs

Accès aux éléments

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs
- La clé doit être non mutable.

Accès aux éléments

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs
- La clé doit être non mutable.
  - Typiquement des chaînes et des nombres.

Accès aux éléments

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs
- La clé doit être non mutable.
  - Typiquement des chaînes et des nombres.
  - On peut utiliser des tuples ne contenant que des éléments non mutables.

Accès aux éléments

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs
- La clé doit être non mutable.
  - Typiquement des chaînes et des nombres.
  - On peut utiliser des tuples ne contenant que des éléments non mutables.

SHELL

```
>>>
```

Accès aux éléments

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs
- La clé doit être non mutable.
  - Typiquement des chaînes et des nombres.
  - On peut utiliser des tuples ne contenant que des éléments non mutables.

SHELL
```
>>> dico = { 'un':234 , 2:[3,4,5] , 3.5:'Bonjour' }
```

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs
- La clé doit être non mutable.
  - Typiquement des chaînes et des nombres.
  - On peut utiliser des tuples ne contenant que des éléments non mutables.

SHELL
```
>>> dico = { 'un':234 , 2:[3,4,5] , 3.5:'Bonjour' }
>>>
```

Accès aux éléments

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs
- La clé doit être non mutable.
  - Typiquement des chaînes et des nombres.
  - On peut utiliser des tuples ne contenant que des éléments non mutables.

SHELL

```
>>> dico = { 'un':234 , 2:[3,4,5] , 3.5:'Bonjour' }
>>> dico[3.5]
```

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs
- La clé doit être non mutable.
  - Typiquement des chaînes et des nombres.
  - On peut utiliser des tuples ne contenant que des éléments non mutables.

SHELL
```
>>> dico = { 'un':234 , 2:[3,4,5] , 3.5:'Bonjour' }
>>> dico[3.5]
'Bonjour'
>>>
```

Accès aux éléments

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs
- La clé doit être non mutable.
  - Typiquement des chaînes et des nombres.
  - On peut utiliser des tuples ne contenant que des éléments non mutables.

SHELL

```
>>> dico = { 'un':234 , 2:[3,4,5] , 3.5:'Bonjour' }
>>> dico[3.5]
'Bonjour'
>>> dico['un']
```

Accès aux éléments

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs
- La clé doit être non mutable.
  - Typiquement des chaînes et des nombres.
  - On peut utiliser des tuples ne contenant que des éléments non mutables.

SHELL

```
>>> dico = { 'un':234 , 2:[3,4,5] , 3.5:'Bonjour' }
>>> dico[3.5]
'Bonjour'
>>> dico['un']
234
>>>
```

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs
- La clé doit être non mutable.
  - Typiquement des chaînes et des nombres.
  - On peut utiliser des tuples ne contenant que des éléments non mutables.

SHELL
```
>>> dico = { 'un':234 , 2:[3,4,5] , 3.5:'Bonjour' }
>>> dico[3.5]
'Bonjour'
>>> dico['un']
234
>>> dico['Bonjour'] # 'Bonjour' est une valeur !
```

- L'accès à une valeur est extrêmement rapide.
  - C'est le principal intérêt des dictionnaires.
  - Les dictionnaires utilisent des tables de hachage
- La recherche est unidirectionnelle
  - on va de la clé vers les valeurs
- La clé doit être non mutable.
  - Typiquement des chaînes et des nombres.
  - On peut utiliser des tuples ne contenant que des éléments non mutables.

SHELL

```
>>> dico = { 'un':234 , 2:[3,4,5] , 3.5:'Bonjour' }
>>> dico[3.5]
'Bonjour'
>>> dico['un']
234
>>> dico['Bonjour'] # 'Bonjour' est une valeur !
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'Bonjour'
```

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

```
>>>
```
SHELL

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL
```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
```

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL
```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
>>>
```

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL
```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
>>> partiel["Gustave"]
```

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL

```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
>>> partiel["Gustave"]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'Gustave'
>>>
```

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL

```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
>>> partiel["Gustave"]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'Gustave'
>>> 'Gustave' in partiel # "Gustave" est-il une clé ?
```

- On veut affecter à `note` la valeur associée à l'étudiant `étu`

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL
```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
>>> partiel["Gustave"]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'Gustave'
>>> 'Gustave' in partiel # "Gustave" est-il une clé ?
False
```

- On veut affecter à `note` la valeur associée à l'étudiant `étu`
  - Si une telle clé n'existe pas, on pose `note="ABS"`

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL
```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
>>> partiel["Gustave"]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'Gustave'
>>> 'Gustave' in partiel # "Gustave" est-il une clé ?
False
```

- On veut affecter à `note` la valeur associée à l'étudiant `étu`
  - Si une telle clé n'existe pas, on pose `note="ABS"`

SCRIPT
```
try:
    note = partiel[étu]
except KeyError:
    note = "ABS"
```

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL
```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
>>> partiel["Gustave"]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'Gustave'
>>> 'Gustave' in partiel # "Gustave" est-il une clé ?
False
```

- On veut affecter à `note` la valeur associée à l'étudiant `étu`
  - Si une telle clé n'existe pas, on pose `note="ABS"`

SCRIPT
```
try:
    note = partiel[étu]
except KeyError:
    note = "ABS"
```

SCRIPT
```
if étu in partiel:
    note = partiel[étu]
else:
    note = "ABS"
```

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL
```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
>>> partiel["Gustave"]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'Gustave'
>>> 'Gustave' in partiel # "Gustave" est-il une clé ?
False
```

- On veut affecter à `note` la valeur associée à l'étudiant `étu`
  - Si une telle clé n'existe pas, on pose `note="ABS"`

SCRIPT
```
try:
    note = partiel[étu]
except KeyError:
    note = "ABS"
```

SCRIPT
```
if étu in partiel:
    note = partiel[étu]
else:
    note = "ABS"
```

- Ou plus simplement en une ligne avec la méthode `get`

SHELL
```
>>>
```

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL
```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
>>> partiel["Gustave"]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'Gustave'
>>> 'Gustave' in partiel # "Gustave" est-il une clé ?
False
```

- On veut affecter à `note` la valeur associée à l'étudiant `étu`
  - Si une telle clé n'existe pas, on pose `note="ABS"`

SCRIPT
```
try:
    note = partiel[étu]
except KeyError:
    note = "ABS"
```

SCRIPT
```
if étu in partiel:
    note = partiel[étu]
else:
    note = "ABS"
```

- Ou plus simplement en une ligne avec la méthode `get`

SHELL
```
>>> partiel.get("Alice",'ABS')
```

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL
```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
>>> partiel["Gustave"]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'Gustave'
>>> 'Gustave' in partiel # "Gustave" est-il une clé ?
False
```

- On veut affecter à `note` la valeur associée à l'étudiant `étu`
  - Si une telle clé n'existe pas, on pose `note="ABS"`

SCRIPT
```
try:
    note = partiel[étu]
except KeyError:
    note = "ABS"
```

SCRIPT
```
if étu in partiel:
    note = partiel[étu]
else:
    note = "ABS"
```

- Ou plus simplement en une ligne avec la méthode `get`

SHELL
```
>>> partiel.get("Alice",'ABS')
15
>>>
```

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL
```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
>>> partiel["Gustave"]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'Gustave'
>>> 'Gustave' in partiel # "Gustave" est-il une clé ?
False
```

- On veut affecter à `note` la valeur associée à l'étudiant `étu`
  - Si une telle clé n'existe pas, on pose `note="ABS"`

SCRIPT
```
try:
    note = partiel[étu]
except KeyError:
    note = "ABS"
```

SCRIPT
```
if étu in partiel:
    note = partiel[étu]
else:
    note = "ABS"
```

- Ou plus simplement en une ligne avec la méthode `get`

SHELL
```
>>> partiel.get("Alice",'ABS')
15
>>> partiel.get("Gustave",'ABS')
```

- Si on utilise une clé qui n'existe pas, une exception est levée.
  - Pour savoir si une clé existe on peut utiliser mot-clé `in`

SHELL
```
>>> partiel = { 'Alice':15 , 'Bob':13 , "Charline":9}
>>> partiel["Gustave"]
Traceback (most recent call last):
  File "<console>", line 1, in <module>
KeyError:  'Gustave'
>>> 'Gustave' in partiel # "Gustave" est-il une clé ?
False
```

- On veut affecter à `note` la valeur associée à l'étudiant `étu`
  - Si une telle clé n'existe pas, on pose `note="ABS"`

SCRIPT
```
try:
    note = partiel[étu]
except KeyError:
    note = "ABS"
```

SCRIPT
```
if étu in partiel:
    note = partiel[étu]
else:
    note = "ABS"
```

- Ou plus simplement en une ligne avec la méthode `get`

SHELL
```
>>> partiel.get("Alice",'ABS')
15
>>> partiel.get("Gustave",'ABS')
'ABS'
```

Modifier un dictionnaire

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.

Modifier un dictionnaire

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

```
>>>
```
SHELL

Modifier un dictionnaire

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL

```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
```

Modifier un dictionnaire

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL

```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>>
```

Modifier un dictionnaire

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL

```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
```

Modifier un dictionnaire

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL

```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>>
```

Modifier un dictionnaire

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL

```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
```

Modifier un dictionnaire

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL

```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

Modifier un dictionnaire

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL
```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

- On peut ajouter un nouveau couple `clé:valeur` en utilisant l'affectation

SHELL
```
>>>
```

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL
```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

- On peut ajouter un nouveau couple `clé:valeur` en utilisant l'affectation

SHELL
```
>>> dico
```

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL
```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

- On peut ajouter un nouveau couple `clé:valeur` en utilisant l'affectation

SHELL
```
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
>>>
```

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL
```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

- On peut ajouter un nouveau couple `clé:valeur` en utilisant l'affectation

SHELL
```
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
>>> dico[44]='kvar'
```

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL
```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

- On peut ajouter un nouveau couple `clé:valeur` en utilisant l'affectation

SHELL
```
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
>>> dico[44]='kvar'
>>>
```

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL
```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

- On peut ajouter un nouveau couple `clé:valeur` en utilisant l'affectation

SHELL
```
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
>>> dico[44]='kvar'
>>> dico
```

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL
```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

- On peut ajouter un nouveau couple `clé:valeur` en utilisant l'affectation

SHELL
```
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
>>> dico[44]='kvar'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri', 44: 'kvar'}
```

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL
```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

- On peut ajouter un nouveau couple `clé:valeur` en utilisant l'affectation

SHELL
```
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
>>> dico[44]='kvar'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri', 44: 'kvar'}
```

- On peut supprimer un couple (`clé:valeur`) avec la commande pop

SHELL
```
>>>
```

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL
```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

- On peut ajouter un nouveau couple `clé:valeur` en utilisant l'affectation

SHELL
```
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
>>> dico[44]='kvar'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri', 44: 'kvar'}
```

- On peut supprimer un couple (`clé:valeur`) avec la commande pop

SHELL
```
>>> dico.pop(33)
```

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL
```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

- On peut ajouter un nouveau couple `clé:valeur` en utilisant l'affectation

SHELL
```
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
>>> dico[44]='kvar'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri', 44: 'kvar'}
```

- On peut supprimer un couple (`clé:valeur`) avec la commande pop

SHELL
```
>>> dico.pop(33)
'tri'
>>>
```

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL
```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

- On peut ajouter un nouveau couple `clé:valeur` en utilisant l'affectation

SHELL
```
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
>>> dico[44]='kvar'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri', 44: 'kvar'}
```

- On peut supprimer un couple (`clé:valeur`) avec la commande pop

SHELL
```
>>> dico.pop(33)
'tri'
>>> dico
```

- Un dictionnaire est mutable : il est modifiable.
- On peut modifier la valeur associée à une clé en utilisant l'affectation.

SHELL
```
>>> dico = { 11: 'unu' , 22:'Du' , 33:'tri' }
>>> dico[22]='du'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
```

- On peut ajouter un nouveau couple `clé:valeur` en utilisant l'affectation

SHELL
```
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri'}
>>> dico[44]='kvar'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 33: 'tri', 44: 'kvar'}
```

- On peut supprimer un couple (`clé:valeur`) avec la commande pop

SHELL
```
>>> dico.pop(33)
'tri'
>>> dico
{11: 'unu', 22: 'du', 44: 'kvar'}
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SHELL
```
>>>
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SHELL
```
>>> naissance["Athos"]=1615
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SHELL
```
>>> naissance["Athos"]=1615
>>>
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SHELL
```
>>> naissance["Athos"]=1615
>>> naissance["Porthos"]=1617
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SHELL
```
>>> naissance["Athos"]=1615
>>> naissance["Porthos"]=1617
>>>
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SHELL
```
>>> naissance["Athos"]=1615
>>> naissance["Porthos"]=1617
>>> naissance["Aramis"]=1620
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SHELL
```
>>> naissance["Athos"]=1615
>>> naissance["Porthos"]=1617
>>> naissance["Aramis"]=1620
>>>
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SHELL
```
>>> naissance["Athos"]=1615
>>> naissance["Porthos"]=1617
>>> naissance["Aramis"]=1620
>>> naissance["d'Artagnan"]=1615
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SHELL
```
>>> naissance["Athos"]=1615
>>> naissance["Porthos"]=1617
>>> naissance["Aramis"]=1620
>>> naissance["d'Artagnan"]=1615
>>>
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SCRIPT
```
def clés(dico):
    for k in dico.keys():
        v = dico[k]
        print(f"{k} ({v})")
```

SHELL
```
>>> naissance["Athos"]=1615
>>> naissance["Porthos"]=1617
>>> naissance["Aramis"]=1620
>>> naissance["d'Artagnan"]=1615
>>> clés(naissance)
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SCRIPT
```
def clés(dico):
    for k in dico.keys():
        v = dico[k]
        print(f"{k} ({v})")
```

SHELL
```
>>> naissance["Athos"]=1615
>>> naissance["Porthos"]=1617
>>> naissance["Aramis"]=1620
>>> naissance["d'Artagnan"]=1615
>>> clés(naissance)
Athos (1615)
Porthos (1617)
Aramis (1620)
d'Artagnan (1615)
>>>
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SCRIPT
```
def clés(dico):
    for k in dico.keys():
        v = dico[k]
        print(f"{k} ({v})")
```

SCRIPT
```
def valeurs(dico):
    for v in dico.values():
    # pas d'accès aux clés
        print(v,end=' ')
    print('')
```

SHELL
```
>>> naissance["Athos"]=1615
>>> naissance["Porthos"]=1617
>>> naissance["Aramis"]=1620
>>> naissance["d'Artagnan"]=1615
>>> clés(naissance)
Athos (1615)
Porthos (1617)
Aramis (1620)
d'Artagnan (1615)
>>> valeurs(naissance)#une valeur n'est pas forcément unique
```

- On peut parcourir un dictionnaire en parcourant les clés ou les valeurs.

SCRIPT
```
def clés(dico):
    for k in dico.keys():
        v = dico[k]
        print(f"{k} ({v})")
```

SCRIPT
```
def valeurs(dico):
    for v in dico.values():
    # pas d'accès aux clés
        print(v,end=' ')
    print('')
```

SHELL
```
>>> naissance["Athos"]=1615
>>> naissance["Porthos"]=1617
>>> naissance["Aramis"]=1620
>>> naissance["d'Artagnan"]=1615
>>> clés(naissance)
Athos (1615)
Porthos (1617)
Aramis (1620)
d'Artagnan (1615)
>>> valeurs(naissance)#une valeur n'est pas forcément unique
1615 1617 1620 1615
```

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>>
```

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
```

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL

```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>>
```

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
```

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- Ce sont des vues (*view*).

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- Ce sont des vues (*view*).
  - Ce ne sont pas des listes !

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- Ce sont des vues (*view*).
  - Ce ne sont pas des listes !
  - Mais ce sont des objets itérables.

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- Ce sont des vues (*view*).
  - Ce ne sont pas des listes !
  - Mais ce sont des objets itérables.
  - On peut les convertir en tuples, ensembles ou listes.

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- Ce sont des vues (*view*).
  - Ce ne sont pas des listes !
  - Mais ce sont des objets itérables.
  - On peut les convertir en tuples, ensembles ou listes.

SHELL
```
>>>
```

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- Ce sont des vues (*view*).
  - Ce ne sont pas des listes !
  - Mais ce sont des objets itérables.
  - On peut les convertir en tuples, ensembles ou listes.

SHELL
```
>>> list(naissance.keys())
```

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- Ce sont des vues (*view*).
  - Ce ne sont pas des listes !
  - Mais ce sont des objets itérables.
  - On peut les convertir en tuples, ensembles ou listes.

SHELL
```
>>> list(naissance.keys())
['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan']
>>>
```

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- Ce sont des vues (*view*).
  - Ce ne sont pas des listes !
  - Mais ce sont des objets itérables.
  - On peut les convertir en tuples, ensembles ou listes.

SHELL
```
>>> list(naissance.keys())
['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan']
>>> set(naissance.values())
```

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- Ce sont des vues (*view*).
  - Ce ne sont pas des listes !
  - Mais ce sont des objets itérables.
  - On peut les convertir en tuples, ensembles ou listes.

SHELL
```
>>> list(naissance.keys())
['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan']
>>> set(naissance.values())
{1617, 1620, 1615}
```

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- Ce sont des vues (*view*).
  - Ce ne sont pas des listes !
  - Mais ce sont des objets itérables.
  - On peut les convertir en tuples, ensembles ou listes.

SHELL
```
>>> list(naissance.keys())
['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan']
>>> set(naissance.values())
{1617, 1620, 1615}
```

- On peut itérer directement sur un dictionnaire.

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- Ce sont des vues (*view*).
  - Ce ne sont pas des listes !
  - Mais ce sont des objets itérables.
  - On peut les convertir en tuples, ensembles ou listes.

SHELL
```
>>> list(naissance.keys())
['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan']
>>> set(naissance.values())
{1617, 1620, 1615}
```

- On peut itérer directement sur un dictionnaire.
  - C'est comme si on itérait sur les clés.

- À quoi correspondent `dico.keys()` et `dico.values()` ?

SHELL
```
>>> naissance.keys()
dict_keys(['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan'])
>>> naissance.values()
dict_values([1615, 1617, 1620, 1615])
```

- Ce sont des vues (*view*).
  - Ce ne sont pas des listes !
  - Mais ce sont des objets itérables.
  - On peut les convertir en tuples, ensembles ou listes.

SHELL
```
>>> list(naissance.keys())
['Athos', 'Porthos', 'Aramis', 'd'Artagnan']
>>> set(naissance.values())
{1617, 1620, 1615}
```

- On peut itérer directement sur un dictionnaire.
  - C'est comme si on itérait sur les clés.
  - `for k in dico.keys():` ⇔ `for k in dico:`

Exemple : injectivité

- En mathématique une application est injective si :
  - $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, dit autrement, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$

Exemple : injectivité

- En mathématique une application est injective si :
  - $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, dit autrement, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$
- On cherche à savoir si un dictionnaire est injectif.
  - C'est-à-dire si chaque valeur est unique

Exemple : injectivité

- En mathématique une application est injective si :
  - $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, dit autrement, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$
- On cherche à savoir si un dictionnaire est injectif.
  - C'est-à-dire si chaque valeur est unique

SCRIPT

```
def est_injectif(dico):
    for k1 in dico:
        for k2 in dico:
            if k1!=k2 and dico[k1]==dico[k2]:
                return False # collision !
    return True
```

Exemple : injectivité

- En mathématique une application est injective si :
  - $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, dit autrement, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$
- On cherche à savoir si un dictionnaire est injectif.
  - C'est-à-dire si chaque valeur est unique

SCRIPT

```
def est_injectif(dico):
    for k1 in dico:
        for k2 in dico:
            if k1!=k2 and dico[k1]==dico[k2]:
                return False # collision !
    return True
```

- On peut aussi comparer la taille des ensembles de clés et de valeurs.

Exemple : injectivité

- En mathématique une application est injective si :
  - $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, dit autrement, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$
- On cherche à savoir si un dictionnaire est injectif.
  - C'est-à-dire si chaque valeur est unique

SCRIPT

```
def est_injectif(dico):
    for k1 in dico:
        for k2 in dico:
            if k1!=k2 and dico[k1]==dico[k2]:
                return False # collision !
    return True
```

- On peut aussi comparer la taille des ensembles de clés et de valeurs.

SCRIPT

```
def est_injectif(dico):
    nb_clés =  len(set(dico.keys()))
    nb_values = len(set(dico.values()))
    return  nb_clés==nb_values
```

SHELL

```
>>>
```

Exemple : injectivité

- En mathématique une application est injective si :
  - $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, dit autrement, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$
- On cherche à savoir si un dictionnaire est injectif.
  - C'est-à-dire si chaque valeur est unique

SCRIPT

```
def est_injectif(dico):
    for k1 in dico:
        for k2 in dico:
            if k1!=k2 and dico[k1]==dico[k2]:
                return False # collision !
    return True
```

- On peut aussi comparer la taille des ensembles de clés et de valeurs.

SCRIPT

```
def est_injectif(dico):
    nb_clés =  len(set(dico.keys()))
    nb_values = len(set(dico.values()))
    return  nb_clés==nb_values
```

SHELL

```
>>> est_injectif(naissance)
```

Exemple : injectivité

- En mathématique une application est injective si :
  - $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, dit autrement, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$
- On cherche à savoir si un dictionnaire est injectif.
  - C'est-à-dire si chaque valeur est unique

SCRIPT
```
def est_injectif(dico):
    for k1 in dico:
        for k2 in dico:
            if k1!=k2 and dico[k1]==dico[k2]:
                return False # collision !
    return True
```

- On peut aussi comparer la taille des ensembles de clés et de valeurs.

SCRIPT
```
def est_injectif(dico):
    nb_clés =  len(set(dico.keys()))
    nb_values = len(set(dico.values()))
    return  nb_clés==nb_values
```

SHELL
```
>>> est_injectif(naissance)
False
>>>
```

- En mathématique une application est injective si :
  - $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, dit autrement, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$
- On cherche à savoir si un dictionnaire est injectif.
  - C'est-à-dire si chaque valeur est unique

SCRIPT
```
def est_injectif(dico):
    for k1 in dico:
        for k2 in dico:
            if k1!=k2 and dico[k1]==dico[k2]:
                return False # collision !
    return True
```

- On peut aussi comparer la taille des ensembles de clés et de valeurs.

SCRIPT
```
def est_injectif(dico):
    nb_clés =  len(set(dico.keys()))
    nb_values = len(set(dico.values()))
    return  nb_clés==nb_values
```

SHELL
```
>>> est_injectif(naissance)
False
>>> est_injectif({ 1:'eins' , 2:'zwei' , 3:'drei' })
```

- En mathématique une application est injective si :
  - $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, dit autrement, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$
- On cherche à savoir si un dictionnaire est injectif.
  - C'est-à-dire si chaque valeur est unique

SCRIPT
```
def est_injectif(dico):
    for k1 in dico:
        for k2 in dico:
            if k1!=k2 and dico[k1]==dico[k2]:
                return False # collision !
    return True
```

- On peut aussi comparer la taille des ensembles de clés et de valeurs.

SCRIPT
```
def est_injectif(dico):
    nb_clés =  len(set(dico.keys()))
    nb_values = len(set(dico.values()))
    return  nb_clés==nb_values
```

SHELL
```
>>> est_injectif(naissance)
False
>>> est_injectif({ 1:'eins' , 2:'zwei' , 3:'drei' })
True
```

Sommaire

- Partie I. Ensembles
- Partie II. Fonctions de hachage
- Partie III. Dictionnaires
- Partie IV. Mémoïsation
- Partie V. Matrices
- Partie VI. Table des matières

- Objectif : mémoriser les calculs déjà faits pour pouvoir les réutiliser.

- Objectif : mémoriser les calculs déjà faits pour pouvoir les réutiliser.
- Exemple :

- Objectif : mémoriser les calculs déjà faits pour pouvoir les réutiliser.
- Exemple :
  - on calcule `100!` c'est « long », il faut 100 multiplications.

- Objectif : mémoriser les calculs déjà faits pour pouvoir les réutiliser.
- Exemple :
  - on calcule `100!` c'est « long », il faut 100 multiplications.
  - on calcule ensuite `103!` : il faut 103 multiplications.

- Objectif : mémoriser les calculs déjà faits pour pouvoir les réutiliser.
- Exemple :
  - on calcule `100!` c'est « long », il faut 100 multiplications.
  - on calcule ensuite `103!` : il faut 103 multiplications.
  - Si on avait mémorisé `100!`, il aurait suffit de 3 multiplications.
  - car `103! = 100! * 101 * 102 * 103`

- Objectif : mémoriser les calculs déjà faits pour pouvoir les réutiliser.
- Exemple :
  - on calcule `100!` c'est « long », il faut 100 multiplications.
  - on calcule ensuite `103!` : il faut 103 multiplications.
  - Si on avait mémorisé `100!`, il aurait suffit de 3 multiplications.
  - car `103! = 100! * 101 * 102 * 103`
- Il suffit de stocker les résultats dans un dictionnaire.

- Objectif : mémoriser les calculs déjà faits pour pouvoir les réutiliser.
- Exemple :
  - on calcule `100!` c'est « long », il faut 100 multiplications.
  - on calcule ensuite `103!` : il faut 103 multiplications.
  - Si on avait mémorisé `100!`, il aurait suffit de 3 multiplications.
  - car `103! = 100! * 101 * 102 * 103`
- Il suffit de stocker les résultats dans un dictionnaire.
  - `n` sera la clé

- Objectif : mémoriser les calculs déjà faits pour pouvoir les réutiliser.
- Exemple :
  - on calcule `100!` c'est « long », il faut 100 multiplications.
  - on calcule ensuite `103!` : il faut 103 multiplications.
  - Si on avait mémorisé `100!`, il aurait suffit de 3 multiplications.
  - car `103! = 100! * 101 * 102 * 103`
- Il suffit de stocker les résultats dans un dictionnaire.
  - `n` sera la clé
  - le résultat de `fact(n)` sera la valeur.

- Objectif : mémoriser les calculs déjà faits pour pouvoir les réutiliser.
- Exemple :
  - on calcule `100!` c'est « long », il faut 100 multiplications.
  - on calcule ensuite `103!` : il faut 103 multiplications.
  - Si on avait mémorisé `100!`, il aurait suffit de 3 multiplications.
  - car `103! = 100! * 101 * 102 * 103`
- Il suffit de stocker les résultats dans un dictionnaire.
  - `n` sera la clé
  - le résultat de `fact(n)` sera la valeur.
- Principe de l'algorithme

- Objectif : mémoriser les calculs déjà faits pour pouvoir les réutiliser.
- Exemple :
  - on calcule `100!` c'est « long », il faut 100 multiplications.
  - on calcule ensuite `103!` : il faut 103 multiplications.
  - Si on avait mémorisé `100!`, il aurait suffit de 3 multiplications.
  - car `103! = 100! * 101 * 102 * 103`
- Il suffit de stocker les résultats dans un dictionnaire.
  - `n` sera la clé
  - le résultat de `fact(n)` sera la valeur.
- Principe de l'algorithme
  - Si `n` est une clé du dictionnaire, on renvoie la valeur associée.

- Objectif : mémoriser les calculs déjà faits pour pouvoir les réutiliser.
- Exemple :
  - on calcule `100!` c'est « long », il faut 100 multiplications.
  - on calcule ensuite `103!` : il faut 103 multiplications.
  - Si on avait mémorisé `100!`, il aurait suffit de 3 multiplications.
  - car `103! = 100! * 101 * 102 * 103`
- Il suffit de stocker les résultats dans un dictionnaire.
  - `n` sera la clé
  - le résultat de `fact(n)` sera la valeur.
- Principe de l'algorithme
  - Si `n` est une clé du dictionnaire, on renvoie la valeur associée.
  - Sinon, on calcule `v=n*fact(n-1)` et on ajoute `n:v` dans le dictionnaire.

- Objectif : mémoriser les calculs déjà faits pour pouvoir les réutiliser.
- Exemple :
  - on calcule `100!` c'est « long », il faut 100 multiplications.
  - on calcule ensuite `103!` : il faut 103 multiplications.
  - Si on avait mémorisé `100!`, il aurait suffit de 3 multiplications.
  - car `103! = 100! * 101 * 102 * 103`
- Il suffit de stocker les résultats dans un dictionnaire.
  - `n` sera la clé
  - le résultat de `fact(n)` sera la valeur.
- Principe de l'algorithme
  - Si `n` est une clé du dictionnaire, on renvoie la valeur associée.
  - Sinon, on calcule `v=n*fact(n-1)` et on ajoute `n:v` dans le dictionnaire.
- Cette méthode s'appelle la mémoïsation.

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>>
```

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>> from time import time
```

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>> from time import time
>>>
```

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>> from time import time
>>> len(mémoire_cache)
```

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>> from time import time
>>> len(mémoire_cache)
1
>>>
```

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>> from time import time
>>> len(mémoire_cache)
1
>>> t=time(); x=fact(800); t800=time()-t; len(mémoire_cache)
```

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>> from time import time
>>> len(mémoire_cache)
1
>>> t=time(); x=fact(800); t800=time()-t; len(mémoire_cache)
801
>>>
```

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>> from time import time
>>> len(mémoire_cache)
1
>>> t=time(); x=fact(800); t800=time()-t; len(mémoire_cache)
801
>>> t=time(); x=fact(810); t810=time()-t; len(mémoire_cache)
```

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>> from time import time
>>> len(mémoire_cache)
1
>>> t=time(); x=fact(800); t800=time()-t; len(mémoire_cache)
801
>>> t=time(); x=fact(810); t810=time()-t; len(mémoire_cache)
811
>>>
```

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>> from time import time
>>> len(mémoire_cache)
1
>>> t=time(); x=fact(800); t800=time()-t; len(mémoire_cache)
801
>>> t=time(); x=fact(810); t810=time()-t; len(mémoire_cache)
811
>>> print(t810/t800)
```

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>> from time import time
>>> len(mémoire_cache)
1
>>> t=time(); x=fact(800); t800=time()-t; len(mémoire_cache)
801
>>> t=time(); x=fact(810); t810=time()-t; len(mémoire_cache)
811
>>> print(t810/t800)
0.011891279728199 32
>>>
```

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>> from time import time
>>> len(mémoire_cache)
1
>>> t=time(); x=fact(800); t800=time()-t; len(mémoire_cache)
801
>>> t=time(); x=fact(810); t810=time()-t; len(mémoire_cache)
811
>>> print(t810/t800)
0.011891279728199 32
>>> print(f'{t810/t800:.1%}')
```

Implémentation de la factorielle

SCRIPT

```
mémoire_cache = { 0:1 } # fact(0)=1

def fact(n):
    global mémoire_cache # global est facultatif
    # on ne modifie pas l'ensemble mais son contenu
    if n in mémoire_cache:
        return mémoire_cache[n]
    else:
        v = n*fact(n-1)
        mémoire_cache[n]=v
        return v
```

SHELL

```
>>> from time import time
>>> len(mémoire_cache)
1
>>> t=time(); x=fact(800); t800=time()-t; len(mémoire_cache)
801
>>> t=time(); x=fact(810); t810=time()-t; len(mémoire_cache)
811
>>> print(t810/t800)
0.011891279728199 32
>>> print(f'{t810/t800:.1%}')
1.2%
```

- Le calcul de `fact(810)` est 100 fois plus efficace que celui de `fact(800)`

- On a rencontré des récurrences doubles. Exemple : la suite de Fibonacci.

SCRIPT

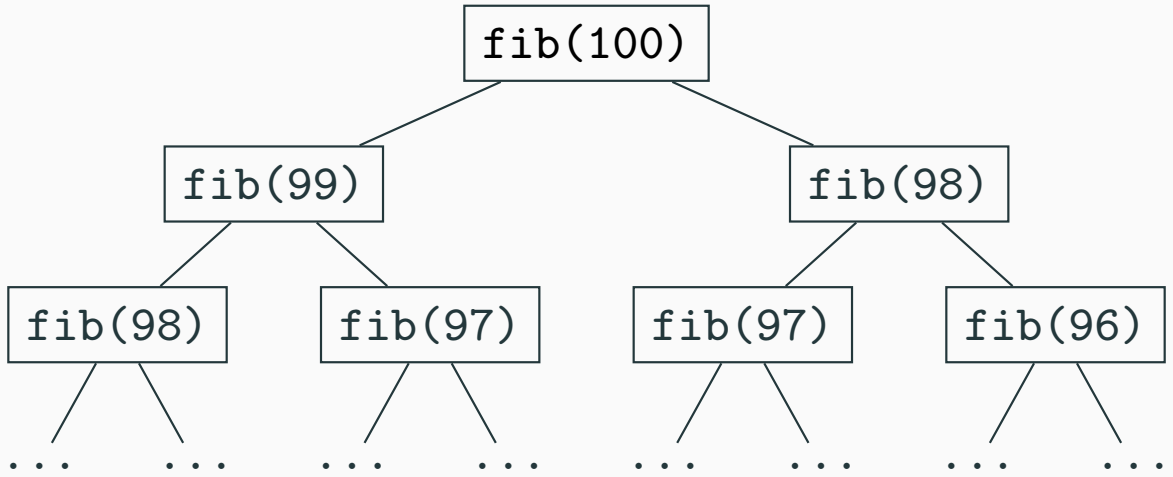
```
def fib(n):
    if n < 2:
        return 1
    else:
        return fib(n-1) + fib(n-2)
```

- On a rencontré des récurrences doubles. Exemple : la suite de Fibonacci.
  - Très peu efficaces

SCRIPT
```
def fib(n):
    if n < 2:
        return 1
    else:
        return fib(n-1) + fib(n-2)
```

- On a rencontré des récurrences doubles. Exemple : la suite de Fibonacci.
  - Très peu efficaces
  - Les mêmes calculs sont faits de nombreuses fois.

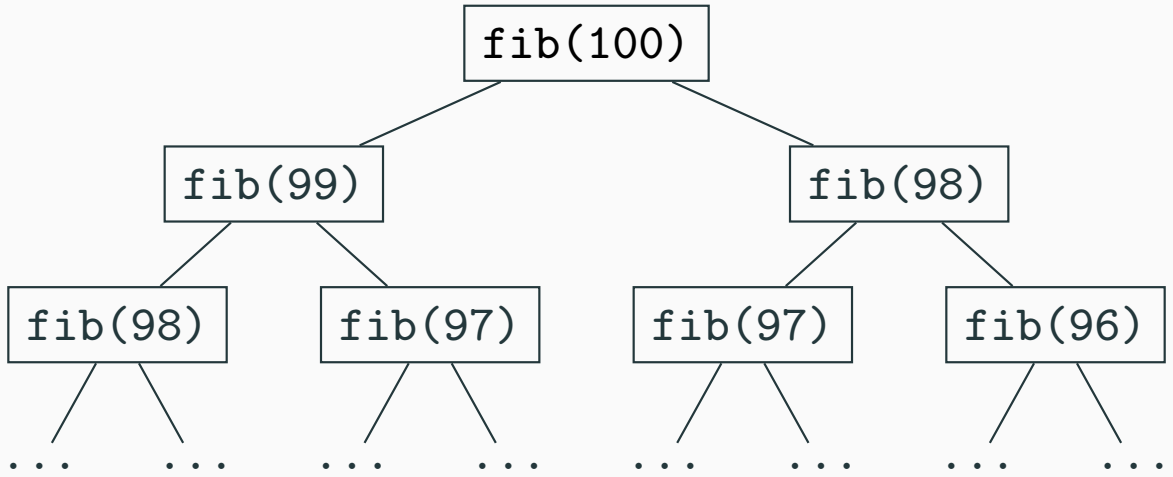
SCRIPT
```
def fib(n):
    if n < 2:
        return 1
    else:
        return fib(n-1) + fib(n-2)
```



- On a rencontré des récurrences doubles. Exemple : la suite de Fibonacci.
  - Très peu efficaces
  - Les mêmes calculs sont faits de nombreuses fois.

SCRIPT
```
def fib(n):
    if n < 2:
        return 1
    else:
        return fib(n-1) + fib(n-2)
```

On souhaite retenir les résultats intermédiaires (mémoïsation)



- Soit T_n le nombre d'appels récursif lors du calcul de `fib(n)` on a
  - $1 + T_n = 2 \cdot$ `fib(n)` car $1 + T_n$ vérifie la même formule de récurrence que `fib(n)` (mais en partant de 2 au lieu de 1)

- Soit T_n le nombre d'appels récursif lors du calcul de `fib(n)` on a
  - $1 + T_n = 2 \cdot$ `fib(n)` car $1 + T_n$ vérifie la même formule de récurrence que `fib(n)` (mais en partant de 2 au lieu de 1)

$$\begin{cases} T_n = 1 + T_{n-1} + T_{n-2} \\ T_0 = T_1 = 1 \end{cases}$$

- Soit T_n le nombre d'appels récursif lors du calcul de `fib(n)` on a
  - $1 + T_n = 2 \cdot$ `fib(n)` car $1 + T_n$ vérifie la même formule de récurrence que `fib(n)` (mais en partant de 2 au lieu de 1)

$$\begin{cases} T_n = 1 + T_{n-1} + T_{n-2} \\ T_0 = T_1 = 1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} (1 + T_n) = (1 + T_{n-1}) + (1 + T_{n-2}) \\ (1 + T_0) = (1 + T_1) = 2 \end{cases}$$

Implémentation de Fibonacci

- Soit T_n le nombre d'appels récursif lors du calcul de `fib(n)` on a
  - $1 + T_n = 2 \cdot$ `fib(n)` car $1 + T_n$ vérifie la même formule de récurrence que `fib(n)` (mais en partant de 2 au lieu de 1)

$$\begin{cases} T_n = 1 + T_{n-1} + T_{n-2} \\ T_0 = T_1 = 1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} (1 + T_n) = (1 + T_{n-1}) + (1 + T_{n-2}) \\ (1 + T_0) = (1 + T_1) = 2 \end{cases}$$

- Pour calculer `fib(100)` il faut donc $2 \cdot$ `fib(100)` $- 1$ appels récursifs

- Soit T_n le nombre d'appels récursif lors du calcul de `fib(n)` on a
  - $1 + T_n = 2 \cdot$ `fib(n)` car $1 + T_n$ vérifie la même formule de récurrence que `fib(n)` (mais en partant de 2 au lieu de 1)

$$\begin{cases} T_n = 1 + T_{n-1} + T_{n-2} \\ T_0 = T_1 = 1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} (1 + T_n) = (1 + T_{n-1}) + (1 + T_{n-2}) \\ (1 + T_0) = (1 + T_1) = 2 \end{cases}$$

- Pour calculer `fib(100)` il faut donc $2 \cdot$ `fib(100)` $- 1$ appels récursifs
  - Supposons que le calcul ne prenne que 10^{-12} s par appel ;

- Soit T_n le nombre d'appels récursif lors du calcul de `fib(n)` on a
  - $1 + T_n = 2 \cdot$ `fib(n)` car $1 + T_n$ vérifie la même formule de récurrence que `fib(n)` (mais en partant de 2 au lieu de 1)

$$\begin{cases} T_n = 1 + T_{n-1} + T_{n-2} \\ T_0 = T_1 = 1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} (1 + T_n) = (1 + T_{n-1}) + (1 + T_{n-2}) \\ (1 + T_0) = (1 + T_1) = 2 \end{cases}$$

- Pour calculer `fib(100)` il faut donc $2 \cdot$ `fib(100)` $- 1$ appels récursifs
  - Supposons que le calcul ne prenne que 10^{-12} s par appel ;
  - le temps nécessaire sera de $\approx 10^9$ s ≈ 36 années.

- Soit T_n le nombre d'appels récursif lors du calcul de `fib(n)` on a
  - $1+T_n = 2\cdot$`fib(n)` car $1+T_n$ vérifie la même formule de récurrence que `fib(n)` (mais en partant de 2 au lieu de 1)

$$\begin{cases} T_n = 1+T_{n-1}+T_{n-2} \\ T_0 = T_1 = 1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} (1+T_n) = (1+T_{n-1})+(1+T_{n-2}) \\ (1+T_0) = (1+T_1) = 2 \end{cases}$$

- Pour calculer `fib(100)` il faut donc $2\cdot$`fib(100)`-1 appels récursifs
  - Supposons que le calcul ne prenne que 10^{-12} s par appel ;
  - le temps nécessaire sera de $\approx 10^9$s ≈ 36 années.

SCRIPT

```
mem = dict()
def fib(n):
    if n==0 or n==1:
        mem[n] = 1
    elif n not in mem:
        mem[n] = fib(n-1)+fib(n-2)
    return mem[n]
```

SHELL

```
>>>
```

- Soit T_n le nombre d'appels récursif lors du calcul de `fib(n)` on a
  - $1+T_n = 2\cdot$`fib(n)` car $1+T_n$ vérifie la même formule de récurrence que `fib(n)` (mais en partant de 2 au lieu de 1)

$$\begin{cases} T_n = 1+T_{n-1}+T_{n-2} \\ T_0 = T_1 = 1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} (1+T_n) = (1+T_{n-1})+(1+T_{n-2}) \\ (1+T_0) = (1+T_1) = 2 \end{cases}$$

- Pour calculer `fib(100)` il faut donc $2\cdot$`fib(100)`-1 appels récursifs
  - Supposons que le calcul ne prenne que 10^{-12} s par appel ;
  - le temps nécessaire sera de $\approx 10^9$s ≈ 36 années.

SCRIPT

```
mem = dict()
def fib(n):
    if n==0 or n==1:
        mem[n] = 1
    elif n not in mem:
        mem[n] = fib(n-1)+fib(n-2)
    return mem[n]
```

SHELL

```
>>> fib(100) #Quasi instantané
```

- Soit T_n le nombre d'appels récursif lors du calcul de `fib(n)` on a
  - $1+T_n = 2\cdot$`fib(n)` car $1+T_n$ vérifie la même formule de récurrence que `fib(n)` (mais en partant de 2 au lieu de 1)

$$\begin{cases} T_n = 1+T_{n-1}+T_{n-2} \\ T_0 = T_1 = 1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} (1+T_n) = (1+T_{n-1})+(1+T_{n-2}) \\ (1+T_0) = (1+T_1) = 2 \end{cases}$$

- Pour calculer `fib(100)` il faut donc $2\cdot$`fib(100)`-1 appels récursifs
  - Supposons que le calcul ne prenne que 10^{-12} s par appel ;
  - le temps nécessaire sera de $\approx 10^9$s ≈ 36 années.

SCRIPT

```
mem = dict()
def fib(n):
    if n==0 or n==1:
        mem[n] = 1
    elif n not in mem:
        mem[n] = fib(n-1)+fib(n-2)
    return mem[n]
```

SHELL

```
>>> fib(100) #Quasi instantané
573147844013817084101
```

- Soit T_n le nombre d'appels récursif lors du calcul de `fib(n)` on a
  - $1+T_n = 2\cdot$`fib(n)` car $1+T_n$ vérifie la même formule de récurrence que `fib(n)` (mais en partant de 2 au lieu de 1)

$$\begin{cases} T_n = 1+T_{n-1}+T_{n-2} \\ T_0 = T_1 = 1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} (1+T_n) = (1+T_{n-1})+(1+T_{n-2}) \\ (1+T_0) = (1+T_1) = 2 \end{cases}$$

- Pour calculer `fib(100)` il faut donc $2\cdot$`fib(100)`-1 appels récursifs
  - Supposons que le calcul ne prenne que 10^{-12} s par appel ;
  - le temps nécessaire sera de $\approx 10^9$s ≈ 36 années.

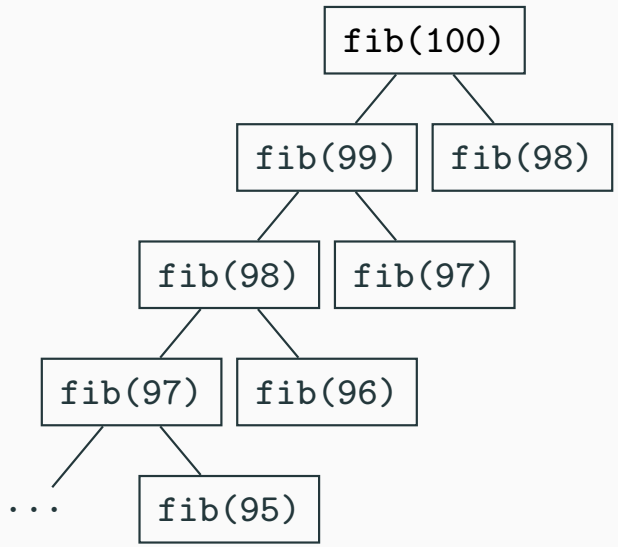
SCRIPT

```
mem = dict()
def fib(n):
    if n==0 or n==1:
        mem[n] = 1
    elif n not in mem:
        mem[n] = fib(n-1)+fib(n-2)
    return mem[n]
```

SHELL

```
>>> fib(100) #Quasi instantané
573147844013817084101
```

Le nouvel arbre d'appels est un « peigne » qui compte seulement 201 appels récursifs.



Sommaire

- Partie I. Ensembles
- Partie II. Fonctions de hachage
- Partie III. Dictionnaires
- Partie IV. Mémoïsation
- Partie V. Matrices
- Partie VI. Table des matières

- Nous avons représenté une matrice 2×2 par une liste de listes (cours 7).

- Nous avons représenté une matrice 2×2 par une liste de listes (cours 7).
- Généralisons cette idée aux matrices $m \times n$ (m lignes et n colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \\ A_{2,0} & A_{2,1} \end{pmatrix}$$

SHELL

```
>>>
```

- Les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 0.

- Nous avons représenté une matrice 2×2 par une liste de listes (cours 7).
- Généralisons cette idée aux matrices $m \times n$ (m lignes et n colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \\ A_{2,0} & A_{2,1} \end{pmatrix}$$

SHELL

```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
```

- Les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 0.

- Nous avons représenté une matrice 2×2 par une liste de listes (cours 7).
- Généralisons cette idée aux matrices $m \times n$ (m lignes et n colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \\ A_{2,0} & A_{2,1} \end{pmatrix}$$

SHELL

```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>>
```

- Les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 0.

- Nous avons représenté une matrice 2×2 par une liste de listes (cours 7).
- Généralisons cette idée aux matrices $m \times n$ (m lignes et n colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \\ A_{2,0} & A_{2,1} \end{pmatrix}$$

SHELL

```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
```

- Les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 0.
  - `len(A)` donne le nombre de lignes (hauteur)

- Nous avons représenté une matrice 2×2 par une liste de listes (cours 7).
- Généralisons cette idée aux matrices $m \times n$ (m lignes et n colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \\ A_{2,0} & A_{2,1} \end{pmatrix}$$

SHELL

```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
3
>>>
```

- Les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 0.
  - `len(A)` donne le nombre de lignes (hauteur)

- Nous avons représenté une matrice 2×2 par une liste de listes (cours 7).
- Généralisons cette idée aux matrices $m \times n$ (m lignes et n colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \\ A_{2,0} & A_{2,1} \end{pmatrix}$$

SHELL

```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
3
>>> (A[0], len(A[0]))
```

- Les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 0.
  - `len(A)` donne le nombre de lignes (hauteur)
  - `len(A[0])` donne le nombre de colonnes (largeur)
  - `A[li]` donne la ligne d'indice li

- Nous avons représenté une matrice 2×2 par une liste de listes (cours 7).
- Généralisons cette idée aux matrices $m \times n$ (m lignes et n colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \\ A_{2,0} & A_{2,1} \end{pmatrix}$$

SHELL

```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
3
>>> (A[0], len(A[0]))
([0, 1], 2)
>>>
```

- Les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 0.
  - `len(A)` donne le nombre de lignes (hauteur)
  - `len(A[0])` donne le nombre de colonnes (largeur)
  - `A[li]` donne la ligne d'indice li

- Nous avons représenté une matrice 2×2 par une liste de listes (cours 7).
- Généralisons cette idée aux matrices $m \times n$ (m lignes et n colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \\ A_{2,0} & A_{2,1} \end{pmatrix}$$

SHELL

```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
3
>>> (A[0], len(A[0]))
([0, 1], 2)
>>> A[2][1]
```

- Les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 0.
  - `len(A)` donne le nombre de lignes (hauteur)
  - `len(A[0])` donne le nombre de colonnes (largeur)
  - `A[li]` donne la ligne d'indice li
  - `A[li][co]` donne le coefficient à la ligne `li` et à la colonne `co` : $A_{li,co}$

- Nous avons représenté une matrice 2×2 par une liste de listes (cours 7).
- Généralisons cette idée aux matrices $m \times n$ (m lignes et n colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \\ A_{2,0} & A_{2,1} \end{pmatrix}$$

SHELL

```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
3
>>> (A[0], len(A[0]))
([0, 1], 2)
>>> A[2][1]
3
```

- Les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 0.
  - `len(A)` donne le nombre de lignes (hauteur)
  - `len(A[0])` donne le nombre de colonnes (largeur)
  - `A[li]` donne la ligne d'indice li
  - `A[li][co]` donne le coefficient à la ligne `li` et à la colonne `co` : $A_{li,co}$
  - et pour la colonne d'indice `co` ?

- Nous avons représenté une matrice 2×2 par une liste de listes (cours 7).
- Généralisons cette idée aux matrices $m \times n$ (m lignes et n colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \\ A_{2,0} & A_{2,1} \end{pmatrix}$$

SHELL
```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
3
>>> (A[0], len(A[0]))
([0, 1], 2)
>>> A[2][1]
3
```

- Les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 0.
  - `len(A)` donne le nombre de lignes (hauteur)
  - `len(A[0])` donne le nombre de colonnes (largeur)
  - `A[li]` donne la ligne d'indice li
  - `A[li][co]` donne le coefficient à la ligne `li` et à la colonne `co` : $A_{li,co}$
  - et pour la colonne d'indice `co` ?

SCRIPT
```
def dimensions(A): # Fonction utile pour la suite
    return (len(A),len(A[0])) # nombre de lignes et de colonnes
```

- On ne peut accéder directement qu'aux lignes.

Extraire une colonne

- On ne peut accéder directement qu'aux lignes.
- Comment accéder aux colonnes ?

- On ne peut accéder directement qu'aux lignes.
- Comment accéder aux colonnes ?

SCRIPT

```
def colonne(A, co):
    res = []
    for li in range(len(A)):
        res.append(A[li][co])
    return res
```

- On ne peut accéder directement qu'aux lignes.
- Comment accéder aux colonnes ?

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    res = []
    for li in range(len(A)):
        res.append(A[li][co])
    return res
```

- En plus pythonesque, en utilisant les compréhensions de listes.

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    return [A[li][co] for li in range(len(A))]
```

- On ne peut accéder directement qu'aux lignes.
- Comment accéder aux colonnes ?

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    res = []
    for li in range(len(A)):
        res.append(A[li][co])
    return res
```

- En plus pythonesque, en utilisant les compréhensions de listes.

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    return [A[li][co] for li in range(len(A))]
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

SHELL
```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
```

- On ne peut accéder directement qu'aux lignes.
- Comment accéder aux colonnes ?

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    res = []
    for li in range(len(A)):
        res.append(A[li][co])
    return res
```

- En plus pythonesque, en utilisant les compréhensions de listes.

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    return [A[li][co] for li in range(len(A))]
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

SHELL
```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>>
```

- On ne peut accéder directement qu'aux lignes.
- Comment accéder aux colonnes ?

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    res = []
    for li in range(len(A)):
        res.append(A[li][co])
    return res
```

- En plus pythonesque, en utilisant les compréhensions de listes.

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    return [A[li][co] for li in range(len(A))]
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

SHELL
```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
```

- On ne peut accéder directement qu'aux lignes.
- Comment accéder aux colonnes ?

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    res = []
    for li in range(len(A)):
        res.append(A[li][co])
    return res
```

- En plus pythonesque, en utilisant les compréhensions de listes.

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    return [A[li][co] for li in range(len(A))]
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

SHELL
```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
3
>>>
```

- On ne peut accéder directement qu'aux lignes.
- Comment accéder aux colonnes ?

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    res = []
    for li in range(len(A)):
        res.append(A[li][co])
    return res
```

- En plus pythonesque, en utilisant les compréhensions de listes.

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    return [A[li][co] for li in range(len(A))]
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

SHELL
```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
3
>>> colonne(A,0)
```

- On ne peut accéder directement qu'aux lignes.
- Comment accéder aux colonnes ?

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    res = []
    for li in range(len(A)):
        res.append(A[li][co])
    return res
```

- En plus pythonesque, en utilisant les compréhensions de listes.

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    return [A[li][co] for li in range(len(A))]
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

SHELL
```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
3
>>> colonne(A,0)
[0, 1, 2]
>>>
```

- On ne peut accéder directement qu'aux lignes.
- Comment accéder aux colonnes ?

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    res = []
    for li in range(len(A)):
        res.append(A[li][co])
    return res
```

- En plus pythonesque, en utilisant les compréhensions de listes.

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    return [A[li][co] for li in range(len(A))]
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

SHELL
```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
3
>>> colonne(A,0)
[0, 1, 2]
>>> colonne(A,1)
```

- On ne peut accéder directement qu'aux lignes.
- Comment accéder aux colonnes ?

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    res = []
    for li in range(len(A)):
        res.append(A[li][co])
    return res
```

- En plus pythonesque, en utilisant les compréhensions de listes.

SCRIPT
```
def colonne(A, co):
    return [A[li][co] for li in range(len(A))]
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

SHELL
```
>>> A = [[0, 1], [1, 2], [2, 3]]
>>> len(A)
3
>>> colonne(A,0)
[0, 1, 2]
>>> colonne(A,1)
[1, 2, 3]
```

Reconnaître une matrice

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes

Reconnaître une matrice

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides

Reconnaître une matrice

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT

```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT

```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL

```
>>>
```

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT
```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> est_matrice([])
```

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT

```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL

```
>>> est_matrice([])
False
>>>
```

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT
```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> est_matrice([])
False
>>> est_matrice([[],[],[]])
```

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT

```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL

```
>>> est_matrice([])
False
>>> est_matrice([[],[],[]])
False
>>>
```

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT
```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> est_matrice([])
False
>>> est_matrice([[],[],[]])
False
>>> est_matrice(12)
```

Reconnaître une matrice

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT

```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL

```
>>> est_matrice([])
False
>>> est_matrice([[],[],[]])
False
>>> est_matrice(12)
False
```

SHELL

```
>>>
```

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT
```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> est_matrice([])
False
>>> est_matrice([[],[],[]])
False
>>> est_matrice(12)
False
```

SHELL
```
>>> est_matrice([1,2,3])
```

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT
```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> est_matrice([])
False
>>> est_matrice([[],[],[]])
False
>>> est_matrice(12)
False
```

SHELL
```
>>> est_matrice([1,2,3])
False
>>>
```

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT
```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> est_matrice([])
False
>>> est_matrice([[],[],[]])
False
>>> est_matrice(12)
False
```

SHELL
```
>>> est_matrice([1,2,3])
False
>>> est_matrice([[1,2],[3,4],[5,6]])
```

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT
```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> est_matrice([])
False
>>> est_matrice([[],[],[]])
False
>>> est_matrice(12)
False
```

SHELL
```
>>> est_matrice([1,2,3])
False
>>> est_matrice([[1,2],[3,4],[5,6]])
True
>>>
```

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT
```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL
```
>>> est_matrice([])
False
>>> est_matrice([[],[],[]])
False
>>> est_matrice(12)
False
```

SHELL
```
>>> est_matrice([1,2,3])
False
>>> est_matrice([[1,2],[3,4],[5,6]])
True
>>> est_matrice([[1,2],[3],[5,6]])
```

Reconnaître une matrice

- Comment déterminer si un objet Python est une matrice ?
  - c'est une liste de listes
  - Les lignes et les colonnes doivent être non vides
  - toutes les colonnes ont la même taille

SCRIPT

```
def est_matrice(A):
    # A doit être une liste non-vide
    if type(A) != list or A==[]:
        return False
    # A[0] doit être une liste non-vide
    if type(A[0]) != list or A[0]==[]:
        return False
    #Toutes les lignes doivent être des listes de même taille
    for ligne in A:
        if type(ligne) != list or len(ligne) != len(A[0]):
            return False
    return True
```

SHELL

```
>>> est_matrice([])
False
>>> est_matrice([[],[],[]])
False
>>> est_matrice(12)
False
```

SHELL

```
>>> est_matrice([1,2,3])
False
>>> est_matrice([[1,2],[3,4],[5,6]])
True
>>> est_matrice([[1,2],[3],[5,6]])
False
```

- Une matrice nulle est une matrice ne contenant que des 0

Matrice 2×3 nulle :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Une matrice nulle est une matrice ne contenant que des 0

SCRIPT

```
def matrice_nulle(n,m):
    A=[]
    for ligne in range(n):
        L=[]
        for colonne in range(m):
            L.append(0)
        A.append(L)
    return A
```

Matrice 2×3 nulle :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Une matrice nulle est une matrice ne contenant que des 0

SCRIPT

```
def matrice_nulle(n,m):
    A=[]
    for ligne in range(n):
        L=[]
        for colonne in range(m):
            L.append(0)
        A.append(L)
    return A
```

Matrice 2×3 nulle :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Une matrice identité est une matrice carrée contenant des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

Matrice identité 4×4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Une matrice nulle est une matrice ne contenant que des 0

SCRIPT
```
def matrice_nulle(n,m):
    A=[]
    for ligne in range(n):
        L=[]
        for colonne in range(m):
            L.append(0)
        A.append(L)
    return A
```

Matrice 2×3 nulle :

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

- Une matrice identité est une matrice carrée contenant des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

SCRIPT
```
def matrice_identité(n):
    A = matrice_nulle(n,n)
    for i in range(n):
        A[i][i]=1
    return A
```

Matrice identité 4×4 :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

- Une matrice nulle est une matrice ne contenant que des 0

SCRIPT

```
def matrice_nulle(n,m):
    A=[]
    for ligne in range(n):
        L=[]
        for colonne in range(m):
            L.append(0)
        A.append(L)
    return A
```

Matrice 2×3 nulle :

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

- Une matrice identité est une matrice carrée contenant des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

SCRIPT

```
def matrice_identité(n):
    A = matrice_nulle(n,n)
    for i in range(n):
        A[i][i]=1
    return A
```

Matrice identité 4×4 :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

- Exercice : écrire ces fonctions en une ligne avec des compréhensions de liste

Calcul de l'opposé

- L'opposé d'une matrice est formé des opposés des élèments initiaux.

$$\text{L'opposé de } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcul de l'opposé

- L'opposé d'une matrice est formé des opposés des élèments initiaux.

$$\text{L'opposé de } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Comment rédiger un tel programme ?

Calcul de l'opposé

- L'opposé d'une matrice est formé des opposés des élèments initiaux.

$$\text{L'opposé de } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Comment rédiger un tel programme ?
  - On crée une matrice nulle de la bonne taille

Calcul de l'opposé

- L'opposé d'une matrice est formé des opposés des élèments initiaux.

$$\text{L'opposé de } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Comment rédiger un tel programme ?
  - On crée une matrice nulle de la bonne taille
  - On y affecte ensuite les bonnes valeurs

Calcul de l'opposé

- L'opposé d'une matrice est formé des opposés des élèments initiaux.

$$\text{L'opposé de } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Comment rédiger un tel programme ?
  - On crée une matrice nulle de la bonne taille
  - On y affecte ensuite les bonnes valeurs

SCRIPT

```
def opposé(A):
    (n,m) = dimensions(A)
    B = matrice_nulle(n,m)
    for i in range(n):
        for j in range(m):
            B[i][j] = - A[i][j]
    return B
```

Calcul de l'opposé

- L'opposé d'une matrice est formé des opposés des élèments initiaux.

$$\text{L'opposé de } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Comment rédiger un tel programme ?
  - On crée une matrice nulle de la bonne taille
  - On y affecte ensuite les bonnes valeurs

SCRIPT

```
def opposé(A):
    (n,m) = dimensions(A)
    B = matrice_nulle(n,m)
    for i in range(n):
        for j in range(m):
            B[i][j] = - A[i][j]
    return B
```

- On est obligé de partir d'une nouvelle matrice.

Calcul de l'opposé

- L'opposé d'une matrice est formé des opposés des élèments initiaux.

$$\text{L'opposé de } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Comment rédiger un tel programme ?
  - On crée une matrice nulle de la bonne taille
  - On y affecte ensuite les bonnes valeurs

SCRIPT

```
def opposé(A):
    (n,m) = dimensions(A)
    B = matrice_nulle(n,m)
    for i in range(n):
        for j in range(m):
            B[i][j] = - A[i][j]
    return B
```

- On est obligé de partir d'une nouvelle matrice.
  - En effet si j'écris B=A, toute modification de B affectera A.

- L'opposé d'une matrice est formé des opposés des élèments initiaux.

$$\text{L'opposé de } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Comment rédiger un tel programme ?
  - On crée une matrice nulle de la bonne taille
  - On y affecte ensuite les bonnes valeurs

SCRIPT

```
def opposé(A):
    (n,m) = dimensions(A)
    B = matrice_nulle(n,m)
    for i in range(n):
        for j in range(m):
            B[i][j] = - A[i][j]
    return B
```

- On est obligé de partir d'une nouvelle matrice.
  - En effet si j'écris B=A, toute modification de B affectera A.
  - Voir le cours 5 sur la gestion de la mémoire concernant les listes.

- La trace d'une matrice est la somme des éléments diagonaux.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

La trace de A vaut $1 + 6 + 2 + 7 = 16$

- La trace d'une matrice est la somme des éléments diagonaux.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

La trace de A vaut $1 + 6 + 2 + 7 = 16$

- Le concept n'a de sens que dans une matrice carrée

- La trace d'une matrice est la somme des éléments diagonaux.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

La trace de A vaut $1+6+2+7=16$

- Le concept n'a de sens que dans une matrice carrée

SCRIPT

```
def trace(A):
    (n,m)=dimensions(A)
    if n != m :
        raise ValueError('Trace : matrice non carrée')
    tr = 0
    for i in range(n):
        tr = tr + A[i][i]
    return tr
```

- On peut ajouter deux matrices coefficient par coefficient
  - les matrices doivent être de même dimensions.

- On peut ajouter deux matrices coefficient par coefficient
  - les matrices doivent être de même dimensions.

$$\begin{pmatrix} 30 & 1 & 20 \\ 3 & 11 & 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 60 & 3 \\ 20 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 61 & 23 \\ 23 & 10 & 57 \end{pmatrix}$$

- On peut ajouter deux matrices coefficient par coefficient
  - les matrices doivent être de même dimensions.

$$\begin{pmatrix} 30 & 1 & 20 \\ 3 & 11 & 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 60 & 3 \\ 20 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 61 & 23 \\ 23 & 10 & 57 \end{pmatrix}$$

SCRIPT

```
def somme(A,B):
    (n,m) = dimensions(A)
    if (n,m) != dimensions(B):
        raise ValueError('Dimensions incompatibles')
    C = matrice_nulle(n,m)
    for i in range(n):
        for j in range(m):
            C[i][j] = A[i][j] + B[i][j]
    return C
```

Calcul du produit

- On peut multiplier deux matrices entre elles [Wikipédia]

Calcul du produit

- On peut multiplier deux matrices entre elles [Wikipédia]
  - la longueur de la première doit être égale à la hauteur de la deuxième

Calcul du produit

- On peut multiplier deux matrices entre elles [Wikipédia]
  - la longueur de la première doit être égale à la hauteur de la deuxième
  - On pose N ce nombre en commun.

Calcul du produit

- On peut multiplier deux matrices entre elles [Wikipédia]
  - la longueur de la première doit être égale à la hauteur de la deuxième
  - On pose N ce nombre en commun.
  - La matrice produit $M = AB$ est définie par $M_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} A_{i,k} \times B_{k,j}$

Calcul du produit

- On peut multiplier deux matrices entre elles [Wikipédia]
  - la longueur de la première doit être égale à la hauteur de la deuxième
  - On pose N ce nombre en commun.
  - La matrice produit $M = AB$ est définie par $M_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} A_{i,k} \times B_{k,j}$

SCRIPT

```
def coefficient_produit(A,B,i,j):
    (n,m)=dimensions(A)
    c = 0
    for k in range(n):# de 0 à n-1 (et non comme en math de 1 à n)
        c = c + A[i][k]*B[k][j]
    return c

def produit(A,B):
    (la,ca) = dimensions(A) ; (lb,cb) = dimensions(B)
    if lb != ca:
        raise ValueError('Dimensions incompatibles')
    C = matrice_nulle(la,cb)
    for i in la:
        for j in cb:
            C[i][j] = coefficient_produit(A,B,i,j)
    return C
```

Calcul du produit

- On peut multiplier deux matrices entre elles [Wikipédia]
  - la longueur de la première doit être égale à la hauteur de la deuxième
  - On pose N ce nombre en commun.
  - La matrice produit $M = AB$ est définie par $M_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} A_{i,k} \times B_{k,j}$

SCRIPT

```
def coefficient_produit(A,B,i,j):
    (n,m)=dimensions(A)
    c = 0
    for k in range(n):# de 0 à n-1 (et non comme en math de 1 à n)
        c = c + A[i][k]*B[k][j]
    return c

def produit(A,B):
    (la,ca) = dimensions(A) ; (lb,cb) = dimensions(B)
    if lb != ca:
        raise ValueError('Dimensions incompatibles')
    C = matrice_nulle(la,cb)
    for i in la:
        for j in cb:
            C[i][j] = coefficient_produit(A,B,i,j)
    return C
```

- On utilise une sous-fonction pour éviter d'avoir trop de `for` imbriqués.

- Une image est un tableau de pixels.

- Une image est un tableau de pixels.
- Un pixel (en noir et blanc) ne peut avoir que deux valeurs :

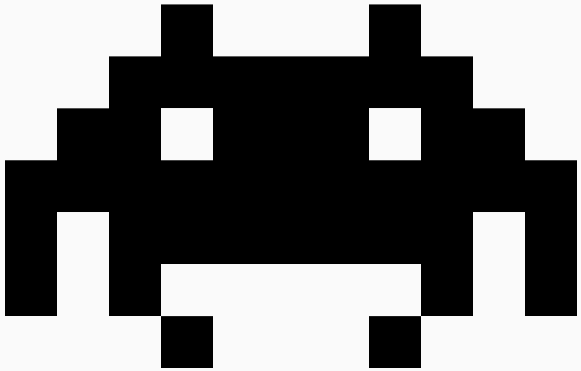
Application : images bitmaps

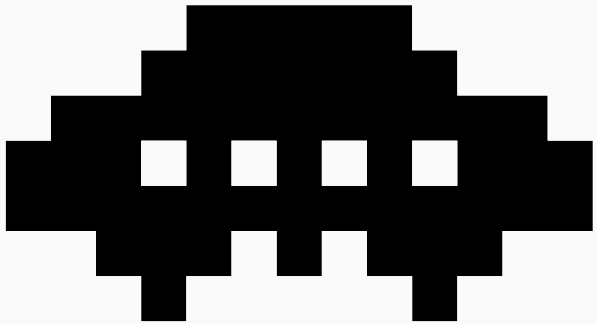
- Une image est un tableau de pixels.
- Un pixel (en noir et blanc) ne peut avoir que deux valeurs :
  - 0 : pixel blanc
  - 1 : pixel noir

Application : images bitmaps

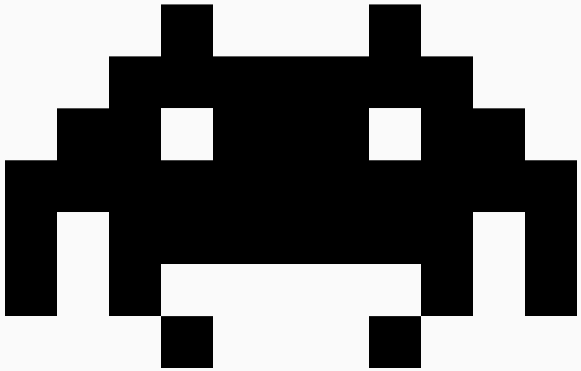
- Une image est un tableau de pixels.
- Un pixel (en noir et blanc) ne peut avoir que deux valeurs :
  - 0 : pixel blanc
  - 1 : pixel noir
- Une image pourra donc être représentée par une matrice de 0 et de 1

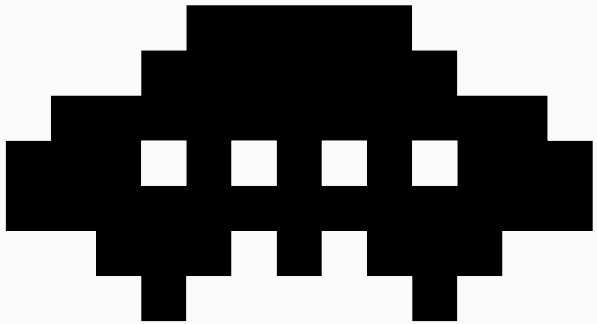
- Une image est un tableau de pixels.
- Un pixel (en noir et blanc) ne peut avoir que deux valeurs :
  - 0 : pixel blanc
  - 1 : pixel noir
- Une image pourra donc être représentée par une matrice de 0 et de 1





- Une image est un tableau de pixels.
- Un pixel (en noir et blanc) ne peut avoir que deux valeurs :
  - 0 : pixel blanc
  - 1 : pixel noir
- Une image pourra donc être représentée par une matrice de 0 et de 1





- Voir TP !

Merci pour votre attention
Questions

?

Cours 8 — Ensembles, dictionnaires et matrices

Concours Tk

Partie I. Ensembles

Type de données

Ensembles Python

Accès aux éléments d'un ensemble

Appartenance et inclusion

Nombre d'éléments d'un ensemble

Construire un ensemble

Modifier un ensemble

Opérations sur les ensembles

Que puis-je mettre dans un ensemble ?

Partie II. Fonctions de hachage

Qu'est-ce ?

Pourquoi ?

Application aux ensembles

Résumé

Partie III. Dictionnaires

Qu'est-ce ?

Accès aux éléments

Exceptions

Modifier un dictionnaire

Itération

Itérations : Clés et valeurs

Exemple : injectivité

Partie IV. Mémoïsation

Principes : exemple de la factorielle

Implémentation de la factorielle

Mémoïsation et Fibonacci

Implémentation de Fibonacci

Partie V. Matrices

Définitions

Extraire une colonne

Reconnaître une matrice

Quelques matrices particulières

Calcul de l'opposé

Calcul de la trace

Calcul de la somme

Calcul du produit

Application : images bitmaps

Partie VI. Table des matières