UNIVERSITÉ
CÔTE D'AZUR

Programmation impérative en Python

Cours 2. Boucles while et récursions

Olivier Baldellon

Courriel : prénom.nom@univ-cotedazur.fr

Page professionnelle : https://upinfo.univ-cotedazur.fr/~obaldellon/

Licence 1 — Faculté des sciences et ingénierie de Nice — Université Côte d'Azur

Sommaire

- Beaucoup connaissent des choses qu'ils ont vu avant :
  - les listes,
  - les boucles `for`,
  - les `f-string` : `f"blabla"`
- Un outil python est interdit tant que l'on ne l'a pas vu en cours !
  - Le but est-il vraiment de connaître plein d'astuces en Python ?
  - Le but est d'apprendre à programmer.
- Nous prenons les notions dans l'ordre.
  - Il faut comprendre les méthodes générales et pénibles avant de prendre les raccourcis.
  - Ces contraintes sont normales et ont un intérêt pédagogique.
  - Comment faire sans ?
- Une fois l'UE terminée, faite ce que vous voulez !

- Je lis souvent des comparaisons de la forme :

SCRIPT
```
if 0 < x < 1:
    bla bla
```

- Une telle expression a-t-elle un sens ?
  - `1 + 2 + 3` ⟶ `(1 + 2) + 3` ⟶ `3 + 3` ⟶ `6`
  - `0 < x < 1` ⟶ `(0 < x) < 1` ⟶ `True < 1` ⟶ ?
- Bon... pour être honnête Python y arrive très bien.
  - Mais ça ne marche pas avec les autres langages.
  - Mauvais habitude que je vous interdis (pour cette UE)
- La bonne méthode :

SCRIPT
```
if 0 < x and x < 1:
    bla bla
```

Sommaire

- Problème : on souhaite calculer la somme $S(n)$ des entiers de 1 à n avec $n \geq 1$ entier.

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$$

- Il s'agit de construire un algorithme de calcul de $S(n)$: une méthode mécanique, étape par étape qui trouve le résultat correct.
- À partir de cet algorithme, on va coder la fonction S dans le langage choisi, ici Python.
- Ainsi, on obtient un programme, dont l'exécution sur ordinateur permet de calculer la fonction S.

- On veut calculer $S(1000)$. Calculer « à la main » sans utiliser d'astuce est facile, mais laborieux : $1+2+3+\cdots+1000=\ldots$

- On veut donc le faire faire par un ordinateur.
  - la méthode doit détailler chaque étape du calcul (pas d'improvisation)
  - la méthode doit marcher pour tous les entiers n positif.

- Trois manières classiques pour calculer $S(n)$:
  - le calcul direct,
  - la récurrence,
  - la boucle ou itération.

C'est la solution idéale, mais rarement possible.

- Nécessite une idée (un peu) astucieuse.
- Ici on a la formule :

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

SCRIPT
```
def S(n):
    return n*(n+1)//2
```

SHELL
```
>>> S(1000)
500500
```

- Ce programme fonctionne pour toutes les valeurs de n.
- Il est de plus très rapide ; il ne nécessite que 3 opérations.

- Comme la récurrence mathématique, on résout un problème en le supposant résolu pour des cas plus simples.
- On veut calculer $S(n)$, on s'autorise à utiliser $S(k)$ pour $k < n$.

Cas typiques :
- $k = n - 1$
- $k = n//2$

- On a :

$$S(n) = \underbrace{1 + 2 + \cdots + (n-1)}_{=S(n-1)} + n = S(n-1) + n$$

- Pour calculer $S(n)$, il suffit donc de calculer $S(n-1)$.
- Et comment calculer $S(n-1)$? À partir de $S(n-2)$
- Mais il faut s'arrêter : on peut calculer $S(1)$ directement.

$$S(5) = 15$$

On remplace successivement, les valeurs $S(n)$

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

Détail du calcul

$$S(5) = S(5)$$

$$S(5) = S(4) + 5$$

$$S(5) = S(4) + 5$$

$$S(5) = (S(3) + 4) + 5$$

$$S(5) = (S(3) + 4) + 5$$

$$S(5) = ((S(2) + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = ((S(2) + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = (((1 + 2) + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = (((1 + 2) + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = ((3 + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = ((3 + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = (6 + 4) + 5$$

$$S(5) = (6 + 4) + 5$$

$$S(5) = 10 + 5$$

$$S(5) = 10 + 5$$

$$S(5) = 15$$

SCRIPT

```
def S(n):
    if n == 1: # Cas d'arrêt
        return 1
    else:
        return S(n-1) + n # Formule de récurrence
```

Dans un programme récursif il faut :

- Le cas d'arrêt
- La formule de récurrence

$$\begin{cases} S(1) & = 1 \\ S(n) & = S(n-1)+n \end{cases}$$

- Un simple `if else` suffit alors.

- Python est mauvais pour la récursion : à éviter quand il y a trop d'appels récursifs...

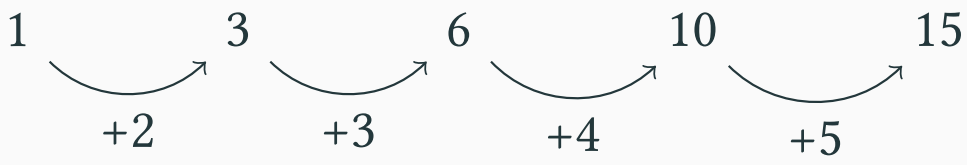
On considère la suite u_n arithmético-géométrique définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 &= 234 \\ u_{n+1} &= -\dfrac{8}{10}u_n + 3 \end{cases}$$

- Écrire une fonction récursive pour calculer u_n.
- Quelle semble être sa limite ? L'écrire sous forme de fraction.

Sommaire

- Les boucles forment un mécanisme bien plus répandu pour le calcul.
- Pour calculer de tête $1+2+\cdots+5$ on passe par les résultats intermédiaires suivants :



Variable `somme`

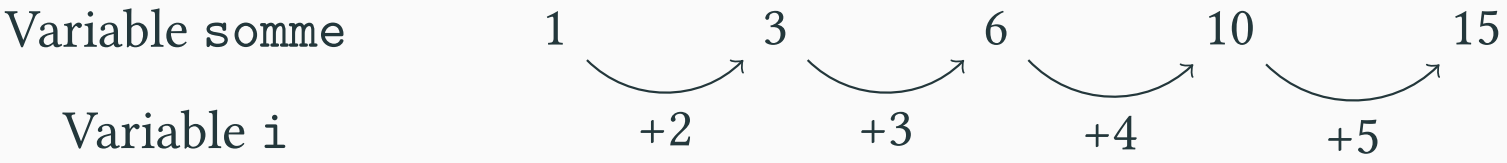
Variable `i`

- Il suffit de deux variables pour faire le calcul
  - Celle correspondant à la somme partielle :
  - Celle correspondant à ce qu'on ajoute :

SCRIPT

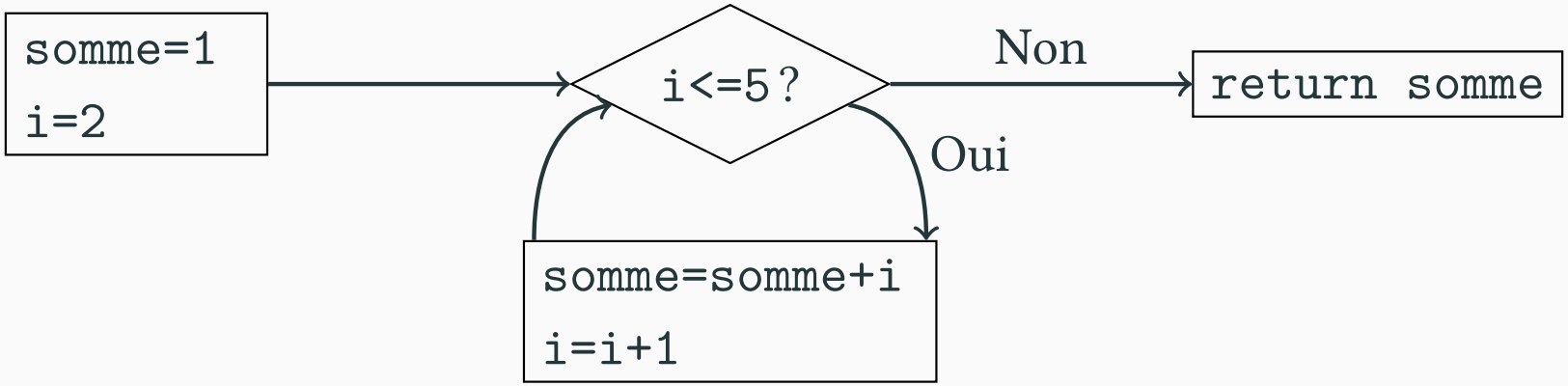
```
somme = somme+i
i = i+1
```

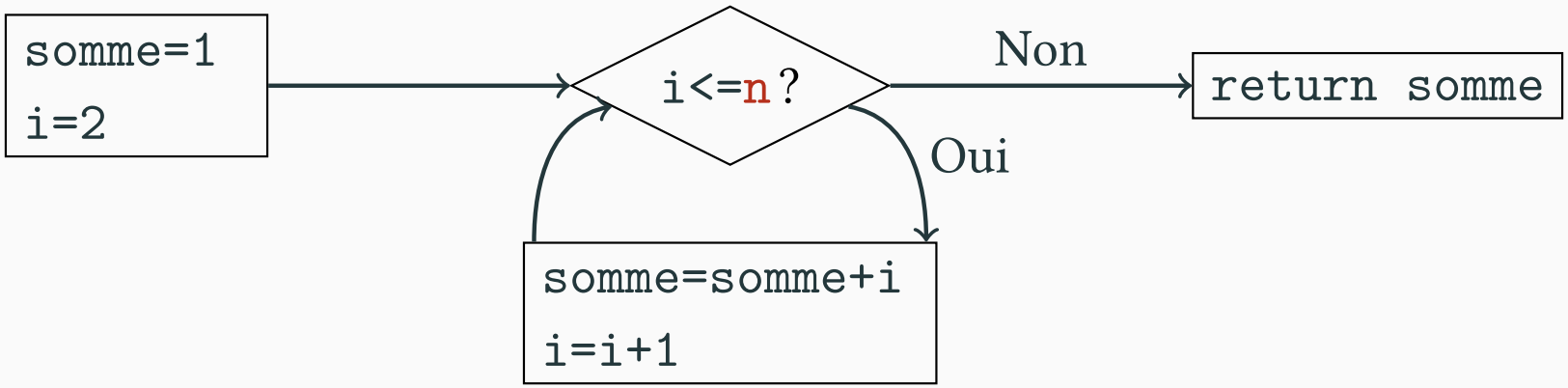
Début, corps de boucle et fin



somme	1	3	6	10	15
i	2	3	4	5	6

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**





- Pour cela on utilise une boucle `while` (tant que)

SCRIPT

```
def S(n):
    somme=1                 # initialisation
    i=2                     # initialisation
    while i<=n:             # condition
        somme=somme+i       # corps de boucle
        i=i+1               # corps de boucle
    return somme
```

- L'ordre des instructions compte ! On commence avec `i=2` et `somme=1`.

SCRIPT
```
somme = somme+i
i = i+1
```

- `i==2` et `somme==3`
- `i==3` et `somme==3`

SCRIPT
```
i = i+1
somme = somme+i
```

- `i==3` et `somme==1`
- `i==3` et `somme==4`

- Pour comprendre ce que fait une boucle, on peut utiliser des `print`.

SCRIPT
```
def S(n):
    somme=1
    i=2
    while i<=n:
        i=i+1
        somme=somme+i
        print('i =',i, 'et somme =',somme)
    return somme
```

SHELL
```
>>> S(5)
i = 3 et somme = 4
i = 4 et somme = 8
i = 5 et somme = 13
i = 6 et somme = 19
19
```

- La condition est fondamentale ! C'est une grande source de bogue.
- Si la condition est toujours vérifiée, on ne sort jamais de la boucle.

SCRIPT
```
i=3
while i<=5:
    i=i-1
```

- Une seule solution : ~~la manifestation !~~ le raccourci Ctrl + C

Synthèse

SCRIPT
```
initialisation # Initialisation des
initialisation # variables de boucle
while conditions:
    instruction # Corps de boucle executé
    instruction # tant que le Test est valide
instruction # Lignes executées
instruction # dans tous les cas
```

Écrire une fonction `table_multiplication(n)` qui affiche la table de `n`.

SHELL
```
>>> table_multiplication(11)
0 * 11 = 0
1 * 11 = 11
2 * 11 = 22
3 * 11 = 33
4 * 11 = 44
5 * 11 = 55
6 * 11 = 66
7 * 11 = 77
8 * 11 = 88
9 * 11 = 99
10 * 11 = 110
```

Sommaire

- On dit qu'un entier naturel n est premier s'il a exactement deux diviseurs positifs : 1 et n.
  - Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
- Il y a une infinité de nombres premiers (*cf.* Euclide).
- Si n n'est pas premier,
  - alors n admet une diviseur d, avec $1 < d < n$.
  - dans ce cas, puisque d divise n on a `n%d == 0` ($d \neq 0$).
- Exemple : 2021027 n'est pas premier. En effet,

SHELL
```
>>> 2021027 % 1009
0
```

Un algorithme naïf

- Tester si un nombre d divise n pour 1<d<n.

SCRIPT

```
def est_premier(n):
    if n<2:
        return False
    d = 2
    while n%d != 0:
        d = d+1
    # on est sorti de la boucle, si c'est pour d == n,
    # alors n est premier
    return d == n
```

- Problème : lent car pas malin (on teste trop de diviseurs d).

Un algorithme moins naïf

- (1) Si n est pair, il est premier seulement si $n = 2$
- (2) Si n est impair, ses seuls diviseurs sont impairs.

- si n n'est pas premier,
  - il possède un plus petit diviseur premier d
  - n s'écrit alors $n = d \cdot m$ avec $d \leq m$.
  - $d \cdot d \leq d \cdot m = n$

SCRIPT

```
def est_premier(n):
    if n < 2:
        return False
    elif n%2 == 0:
        return n == 2 # Astuce (1)
    else:
        d = 3 # on test seulement les d impairs (2)
        while d*d <= n and n%d != 0:
            d = d+2 # si d est impair, d+2 est le suivant (2)

        # on est sorti de la boucle, si d*d > n,
        # alors n est premier
        return d*d > n
```

- Mieux mais loin d'être optimal. Il existe des tests probabilistes ou déterministes efficaces. Le module `sympy` fournit la fonction `isprime`.

- Pour un entier `n>1`, on cherche le plus petit `d>1` tel que `d` divise `n`.

SCRIPT
```
def plus_petit_facteur(n):
    d = 2
    while n%d != 0:
        d = d + 1
    return d
```

- Remarque `plus_petit_facteur(n)` renvoie un nombre premier.

- Comme pour tester si n est premier, cet algorithme est naïf. On peut l'améliorer avec les mêmes techniques que précédemment.

Sommaire

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
  - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
  - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL
```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>> 2.5 * 10**50 #  Les puissances de 10 sont notées avec  e+
2.5e+50
```

- On utilise un point au lieu d'une virgule
- Les flottants n'ont qu'un nombre limité de chiffres après la virgule.
- On n'aura qu'une approximation de π et $\sqrt{2}$. Ce qui largement suffisant pour des calculs pratiques.

SHELL
```
>>> import math
>>> math.pi
3.141592653589793
>>> math.sqrt(2)
1.4142135623730951
```

- Le calcul sur les nombres flottants est inexact, on évitera de tester l'égalité de tels nombres.

SHELL
```
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.4
True
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.3
False
```

- On peut prédire le nombre de décimales exactes, mais c'est difficile (voire très difficile) en général.

- Que faire ? Remplacer l'égalité par une précision h

SCRIPT
```
      # a et b flottant
a==b # Déconseillé car dangereux

h=.0001
abs(a-b) < h # Oui
abs(a) < h   # signifie a est presque nul
```

- Quels sont les nombres avec une quantité de chiffres finie après la virgule ?
  - Nombre décimal : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 10.
  - Nombre dyadique : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 2.
- Les flottants sont des nombres dyadiques (un nombre rond pour nous n'est pas forcément rond pour la machine).

$$0,1 = 0,0001100110011001100110011\ldots_2$$

- Python n'affiche qu'une valeur approchée de la valeur interne.

SHELL
```
>>> 0.1
0.1
>>> from decimal import Decimal
>>> Decimal(0.1)
Decimal('0.1000000000000000055511151231257827021181583404541015625')
```

Sommaire

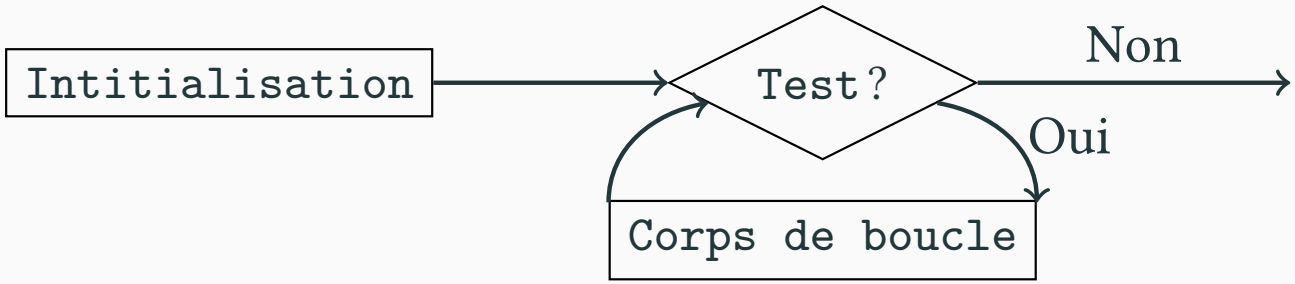
Méthode de Newton : principe

- On veut calculer la racine carrée approchée d'un nombre réel quelconque, par exemple calculer $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ sans utiliser `math.sqrt`.
- Méthode de Newton (1669) :

$$b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{r}{a}\right)$$

Si a est une approximation de $\sqrt{r}$ alors b est une meilleure approximation. (cf explications en TP).

- Trois questions pour coder l'algorithme :



  - Comment améliorer l'approximation courante ? (corps de boucle)
  - Mon approximation est-elle suffisante ? (test)
  - Quelle première approximation choisir ? (initialisation)

- **Comment améliorer l'approximation courante ?** (corps de boucle)
  - Il suffit d'utiliser la formule de Newton (en remplaçant b par a)

```
a = 0.5 * (a + r/a)
```
SCRIPT

- **Mon approximation est-elle suffisante ?** (test)
  - On s'arrête lorsque l'écart avec $\sqrt{r}$ est suffisement petit (on prend h petit)

$$a \approx \sqrt{r} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \approx r \quad \Leftrightarrow \quad |a^2 - r| < h$$

  - Cela veut dire que l'on doit continuer tant que :

```
abs(a*a - r) >= h
```
SCRIPT

- **Quelle première approximation choisir ?** (initialisation)
  - On peut prouver que n'importe quelle valeur strictement positive convient.

```
a=1
```
SCRIPT

SCRIPT

```
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme. (Quatre itérations seulement ont suffi)

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
>>> r2 = racine(2,h)
a =  1
a =  1.5
a =  1.4166666666666665
a =  1.4142156862745097
>>> from math import sqrt
>>> sqrt(2) # La version Python plus précise
1.4142135623730951
>>> r2
1.4142135623746899
>>> abs(sqrt(2)-r2)
1.5947243525715749e-12
```

- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

$$\begin{array}{lllll} \text{PGCD}(4,6) = 2 & \text{car} & 4 = 2\times 2 & \text{et} & 6 = 2\times 3 \\ \text{PGCD}(10,15) = 5 & \text{car} & 10 = 5\times 2 & \text{et} & 15 = 5\times 3 \\ \text{PGCD}(0,8) = 8 & \text{car} & 0 = 8\times 0 & \text{et} & 8 = 8\times 1 \end{array}$$

- L'algorithme d'Euclide calcule le PGCD de deux entiers naturels a et b.
  - (d divise à la fois a et b) $\Leftrightarrow$ (d divise à la fois b et $a\%b$)
  - En particulier, PGCD(a , b) = PGCD(b , $a\%b$)

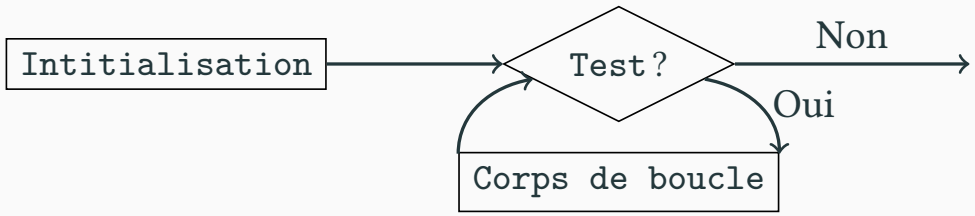
- Calculons le PGCD de 135 et 72.

SHELL
```
>>> 135%72
63
>>> 72%63
9
>>> 63%9
0
```

$$\begin{array}{lcl} \text{PGCD}(135,72) & = & \text{PGCD}(72,63) \\ & = & \text{PGCD}(63,9) \\ & = & \text{PGCD}(9,0) \\ & = & 9 \end{array}$$

Algorithme d'Euclide : analyse

PGCD(135,72) = PGCD(72,63) = PGCD(63,9) = PGCD(9,0) = 9



De quelles variables a-t-on besoin ?

a	135	72	63	9
b	72	63	9	0

- Initialisation : a et b sont des données du problèmes
- Corps de boucle :

SCRIPT
```
a = b    # Faux !
b = a%b  # Pourquoi ?
```

SCRIPT
```
temp=a%b
a = b
b = temp
```

- Test : on continue tant que `b!=0`
  - `b` est un entier naturel qui décroit strictement
  - `b` finira toujours par être égale à 0 : le programme s'arrêtera !

Algorithme d'Euclide : programme

SCRIPT

```
def PGCD(a,b): # on suppose a,b entiers >= 0
    while b != 0:
        temp = a%b
        a = b
        b = temp
        print('a =',a, 'b =', b) # Pour voir !
    return a
```

SHELL

```
>>> PGCD(38160,33000)
a = 33000 b = 5160
a = 5160 b = 2040
a = 2040 b = 1080
a = 1080 b = 960
a = 960 b = 120
a = 120 b = 0
120
```

- Problème récréatif de Leonardo Fibonacci (1202)

Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?

- On note $F(n)$ le nombre de lapins au début du mois n.
- Pour tout $n > 1$, on a $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$

Nouvelle génération = anciens adultes + nouveaux adultes

- On voit de manière assez évidente que :

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

- Mais on souhaite éviter les flottants.

SCRIPT

```
def F(n): # Version récursive
    print('Je calcule F(n) pour n =',n) #Voyons...
    if n==1 or n==2:
        return 1
    else:
        return F(n-1) + F(n-2)
```

SHELL

```
>>> F(6)
Je calcule F(n) pour n = 6
Je calcule F(n) pour n = 5
Je calcule F(n) pour n = 4
Je calcule F(n) pour n = 3
Je calcule F(n) pour n = 2
Je calcule F(n) pour n = 1
Je calcule F(n) pour n = 2
Je calcule F(n) pour n = 3
Je calcule F(n) pour n = 2
Je calcule F(n) pour n = 1
Je calcule F(n) pour n = 4
Je calcule F(n) pour n = 3
Je calcule F(n) pour n = 2
Je calcule F(n) pour n = 1
Je calcule F(n) pour n = 2
8
```

Peu efficace

- On calcule de nombreuses fois la même chose.
- Solution possible : voir cours 7 (mémoïsation)

On souhaite calculer $F(N)$.
L'astuce est d'utiliser deux variables a et b.

$F(n)$	a	1	2	3	5	8
$F(n-1)$	b	1	1	2	3	5
n	n	2	3	4	5	6

- Initialisation

SCRIPT
```
a = 1
b = 1
n = 2
```

- Corps de boucle. On utilise un invariant de boucle $a = F(n)$ et $b = F(n-1)$

SCRIPT
```
# a==F(n) et b==F(n-1)
temp = a+b            # temp == F(n+1)
b = a                 # b == F(n)
a = temp              # a == F(n+1)
# a==F(n+1) et b==F(n)
n = n+1
# a==F(n) et b==F(n-1)
```

- On continue tant que n<N.

- Il suffit d'écire le code...

SCRIPT

```
def F(N):
    a = 1
    b = 1
    n = 2
    while n < N:
        temp = a+b
        b = a
        a = temp
        n = n+1
    return a
```

- ...et apprécier la vitesse et l'efficacité de cette méthode !

SHELL

```
>>> F(8)
21
>>> F(378)
444470572323423749883397351998290851993343081863640916635139
789709528198721586 4
```

On considère la suite u_n arithmético-géométrique définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 &= 234 \\ u_{n+1} &= -\dfrac{8}{10}u_n + 3 \end{cases}$$

- Écrire une fonction avec une boucle while pour calculer u_n.
- Sa limite est $\ell = \dfrac{5}{3}$. Faire une boucle qui s'arrête lorsque $|u_n - \ell| < 10^{-5}$

Sommaire

- La commande `return` provoque la sortie immédiate d'une fonction
  - même à l'intérieur d'une boucle.

SCRIPT
```
def div4(n):
    i = n
    while i < n+4:
        if i%4 == 0:
            return i
        i = i+1
    print('Inutile')
```

SHELL
```
>>> div4(13)
16
>>> div4(144)
144
```

- La commande `break` provoque la sortie de la boucle, l'exécution se poursuit.

SCRIPT
```
def div5(n):
    i = n
    while i < n+5:
        if i%5 == 0:
            break
        i = i+1
    print('Sortie')
    return i
```

SHELL
```
>>> div5(13)
Sortie
15
>>> div5(145)
Sortie
145
```

Déconseillé au moins de 18 ans.

- En utilisant le `break`, on peut se passer de test dans la boucle `while` !

SCRIPT

```
n = 40
while True:
    if n%7 == 0:
        break
    n = n+1
    print('n=',n)
```

- Pratique dangereuse, à ne pas utiliser sans bonnes raisons.

- Pour deux entiers naturels a et n on veut calculer a^n , sans utiliser **.
- Version récursive Idée : $a^n = a \times a^{n-1}$ et $a^0 = 1$

SCRIPT
```
def puissance(a,n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return a * puissance(a, n-1)
```

- Version itérative.

SCRIPT
```
def puissance(a,n):
    i = 0
    p = 1 # p initialisé à a^0
    while i < n:
        p = a*p
        i = i+1 # p == a^i
    return p # i == n et p == a^i donc p == a^n
```

$$
\begin{array}{lllll}
a^{21} & = & a^{2\times 10+1} & = & a\times\left(a^{10}\right)^2 \\
a^{10} & = & a^{2\times 5+0} & = & \left(a^{5}\right)^2 \\
a^{5} & = & a^{2\times 2+1} & = & a\times\left(a^{2}\right)^2 \\
a^{2} & = & a^{2\times 1+0} & = & \left(a^{1}\right)^2 \\
a^{1} & = & a^{2\times 0+1} & = & a\times\left(a^{0}\right)^2
\end{array}
$$

- $a^0 = 1$
- n pair : $a^n = \left(a^{n//2}\right)^2$
- n impair : $a^n = a\times\left(a^{n//2}\right)^2$

- Beaucoup moins d'opérations !

$$a^{21} \to a^{10} \to a^5 \to a^2 \to a^1 \to a^0$$

SCRIPT

```
def puissance_rapide(a,n):
    if n == 0:
        return 1
    elif n%2 == 0:
        return puissance_rapide(a, n//2) ** 2
    else:
        return a * puissance_rapide(a, n//2) ** 2
```

Merci pour votre attention
Questions

?

Cours 2 — Boucles while et récursions