# Programmation impérative en Python

## Cours 2. Boucles while et récursions


Olivier Baldellon

Courriel : `prénom.nom@univ-cotedazur.fr`

Page professionnelle : `http://deptinfo.unice.fr/~obaldellon/`

Licence 1 — Faculté des sciences de Nice — Université Côte d'Azur

# Sommaire

- Rappel, votre moyenne sera calculée à partir de 3 notes :
  - le partiel ;
  - les examen terminal ;
  - les petits tests organisés au cours du semestre.

- Rappel, votre moyenne sera calculée à partir de 3 notes :
  - le partiel ;
  - les examen terminal ;
  - les petits tests organisés au cours du semestre.
- Pour les petits tests :
  - certaines seront annoncées à l'avance ;

- Rappel, votre moyenne sera calculée à partir de 3 notes :
    - le partiel ;
    - les examen terminal ;
    - les petits tests organisés au cours du semestre.
- Pour les petits tests :
    - certaines seront annoncées à l'avance ;
    - d'autres non. :)

- Rappel, votre moyenne sera calculée à partir de 3 notes :
    - le partiel ;
    - les examen terminal ;
    - les petits tests organisés au cours du semestre.
- Pour les petits tests :
    - certaines seront annoncées à l'avance ;
    - d'autres non. :)
    - certains pourront être fait durant les amphis

- Rappel, votre moyenne sera calculée à partir de 3 notes :
  - le partiel ;
  - les examen terminal ;
  - les petits tests organisés au cours du semestre.
- Pour les petits tests :
  - certaines seront annoncées à l'avance ;
  - d'autres non. :)
  - certains pourront être fait durant les amphis
- C'est à vous de vous assurer :

- Rappel, votre moyenne sera calculée à partir de 3 notes :
  - le partiel ;
  - les examen terminal ;
  - les petits tests organisés au cours du semestre.
- Pour les petits tests :
  - certaines seront annoncées à l'avance ;
  - d'autres non. :)
  - certains pourront être fait durant les amphis
- C'est à vous de vous assurer :
  - d'être présent,

# Tests, devoirs et examens

- Rappel, votre moyenne sera calculée à partir de 3 notes :
  - le partiel ;
  - les examen terminal ;
  - les petits tests organisés au cours du semestre.
- Pour les petits tests :
  - certaines seront annoncées à l'avance ;
  - d'autres non. :)
  - certains pourront être fait durant les amphis
- C'est à vous de vous assurer :
  - d'être présent,
  - à l'heure,

- Rappel, votre moyenne sera calculée à partir de 3 notes :
  - le partiel ;
  - les examen terminal ;
  - les petits tests organisés au cours du semestre.
- Pour les petits tests :
  - certaines seront annoncées à l'avance ;
  - d'autres non. :)
  - certains pourront être fait durant les amphis
- C'est à vous de vous assurer :
  - d'être présent,
  - à l'heure,
  - dans le bon groupe,

- Rappel, votre moyenne sera calculée à partir de 3 notes :
  - le partiel ;
  - les examen terminal ;
  - les petits tests organisés au cours du semestre.
- Pour les petits tests :
  - certaines seront annoncées à l'avance ;
  - d'autres non. :)
  - certains pourront être fait durant les amphis
- C'est à vous de vous assurer :
  - d'être présent,
  - à l'heure,
  - dans le bon groupe,
  - en ayant relu le cours !

- Beaucoup connaissent des choses qu'ils ont vu avant :
    - les listes,
    - les boucles `for`,
    - les `f-string` : `f"blabla"`

## Pour ceux qui ont déjà fais du Python

- Beaucoup connaissent des choses qu'ils ont vu avant :
  - les listes,
  - les boucles `for`,
  - les `f-string` : `f"blabla"`
- Un outil python est interdit tant que l'on ne l'a pas vu en cours !

- Beaucoup connaissent des choses qu'ils ont vu avant :
  - les listes,
  - les boucles `for`,
  - les `f-string` : `f"blabla"`
- Un outil python est interdit tant que l'on ne l'a pas vu en cours !
  - Le but est-il vraiment de connaître plein d'astuces en Python ?

# Pour ceux qui ont déjà fais du Python

- Beaucoup connaissent des choses qu'ils ont vu avant :
  - les listes,
  - les boucles `for`,
  - les `f-string` : `f"blabla"`
- Un outil python est interdit tant que l'on ne l'a pas vu en cours !
  - Le but est-il vraiment de connaître plein d'astuces en Python ?
  - Le but est d'apprendre à programmer.

- Beaucoup connaissent des choses qu'ils ont vu avant :
  - les listes,
  - les boucles `for`,
  - les `f-string` : `f"blabla"`
- Un outil python est interdit tant que l'on ne l'a pas vu en cours !
  - Le but est-il vraiment de connaître plein d'astuces en Python ?
  - Le but est d'apprendre à programmer.
- Nous prenons les notions dans l'ordre.
  - Il faut comprendre les méthodes générales et pénibles avant de prendre les raccourcis.

- Beaucoup connaissent des choses qu'ils ont vu avant :
  - les listes,
  - les boucles `for`,
  - les `f-string` : `f"blabla"`
- Un outil python est interdit tant que l'on ne l'a pas vu en cours !
  - Le but est-il vraiment de connaître plein d'astuces en Python ?
  - Le but est d'apprendre à programmer.
- Nous prenons les notions dans l'ordre.
  - Il faut comprendre les méthodes générales et pénibles avant de prendre les raccourcis.
  - Ces contraintes sont normales et ont un intérêt pédagogique.
  - Comment faire sans ?

- Beaucoup connaissent des choses qu'ils ont vu avant :
  - les listes,
  - les boucles `for`,
  - les `f-string` : `f"blabla"`
- Un outil python est interdit tant que l'on ne l'a pas vu en cours !
  - Le but est-il vraiment de connaître plein d'astuces en Python ?
  - Le but est d'apprendre à programmer.
- Nous prenons les notions dans l'ordre.
  - Il faut comprendre les méthodes générales et pénibles avant de prendre les raccourcis.
  - Ces contraintes sont normales et ont un intérêt pédagogique.
  - Comment faire sans ?
- Une fois l'UE terminée, faîtes ce que vous voulez !

- Je lis souvent des comparaisons de la forme :

SCRIPT
```
if 0 < x < 1:
    bla bla
```

- Une telle expression a-t-elle un sens ?

- Je lis souvent des comparaisons de la forme :

SCRIPT
```
if 0 < x < 1:
    bla bla
```

- Une telle expression a-t-elle un sens ?
  - `1 + 2 + 3`

- Je lis souvent des comparaisons de la forme :

SCRIPT
```
if 0 < x < 1:
    bla bla
```

- Une telle expression a-t-elle un sens ?
  - `1 + 2 + 3` $\longrightarrow$ `(1 + 2) + 3`

- Je lis souvent des comparaisons de la forme :

SCRIPT
```
if 0 < x < 1:
    bla bla
```

- Une telle expression a-t-elle un sens ?
  - `1 + 2 + 3` $\longrightarrow$ `(1 + 2) + 3` $\longrightarrow$ `3 + 3`

- Je lis souvent des comparaisons de la forme :

SCRIPT
```
if 0 < x < 1:
    bla bla
```

- Une telle expression a-t-elle un sens ?
  - `1 + 2 + 3` $\longrightarrow$ `(1 + 2) + 3` $\longrightarrow$ `3 + 3` $\longrightarrow$ `6`

- Je lis souvent des comparaisons de la forme :

SCRIPT
```
if 0 < x < 1:
    bla bla
```

- Une telle expression a-t-elle un sens ?
  - `1 + 2 + 3` ⟶ `(1 + 2) + 3` ⟶ `3 + 3` ⟶ `6`
  - `0 < x < 1`

- Je lis souvent des comparaisons de la forme :

SCRIPT

```
if 0 < x < 1:
    bla bla
```

- Une telle expression a-t-elle un sens ?
  - `1 + 2 + 3` $\longrightarrow$ `(1 + 2) + 3` $\longrightarrow$ `3 + 3` $\longrightarrow$ `6`
  - `0 < x < 1` $\longrightarrow$ `(0 < x) < 1`

- Je lis souvent des comparaisons de la forme :

SCRIPT
```
if 0 < x < 1:
    bla bla
```

- Une telle expression a-t-elle un sens ?
  - `1 + 2 + 3` $\longrightarrow$ `(1 + 2) + 3` $\longrightarrow$ `3 + 3` $\longrightarrow$ `6`
  - `0 < x < 1` $\longrightarrow$ `(0 < x) < 1` $\longrightarrow$ `True < 1`

- Je lis souvent des comparaisons de la forme :

SCRIPT
```
if 0 < x < 1:
    bla bla
```

- Une telle expression a-t-elle un sens ?
  - `1 + 2 + 3` $\longrightarrow$ `(1 + 2) + 3` $\longrightarrow$ `3 + 3` $\longrightarrow$ `6`
  - `0 < x < 1` $\longrightarrow$ `(0 < x) < 1` $\longrightarrow$ `True < 1` $\longrightarrow$ ?

- Je lis souvent des comparaisons de la forme :

```
if 0 < x < 1:
    bla bla
```
SCRIPT

- Une telle expression a-t-elle un sens ?
    - `1 + 2 + 3` $\longrightarrow$ `(1 + 2) + 3` $\longrightarrow$ `3 + 3` $\longrightarrow$ `6`
    - `0 < x < 1` $\longrightarrow$ `(0 < x) < 1` $\longrightarrow$ `True < 1` $\longrightarrow$ ?
- Bon... pour être honnête Python y arrive très bien.
    - Mais ça ne marche pas avec les autres langages.
    - Mauvais habitude que je vous interdis (pour cette UE)

- Je lis souvent des comparaisons de la forme :

```
if 0 < x < 1:
    bla bla
```
SCRIPT

- Une telle expression a-t-elle un sens ?
  - `1 + 2 + 3` $\longrightarrow$ `(1 + 2) + 3` $\longrightarrow$ `3 + 3` $\longrightarrow$ `6`
  - `0 < x < 1` $\longrightarrow$ `(0 < x) < 1` $\longrightarrow$ `True < 1` $\longrightarrow$ ?
- Bon… pour être honnête Python y arrive très bien.
  - Mais ça ne marche pas avec les autres langages.
  - Mauvais habitude que je vous interdis (pour cette UE)
- La bonne méthode :

```
if 0 < x and x < 1:
    bla bla
```
SCRIPT

# Sommaire

- Problème : on souhaite calculer la somme $S(n)$ des entiers de 1 à $n$ avec $n \geq 1$ entier.

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$$

- Problème : on souhaite calculer la somme $S(n)$ des entiers de 1 à $n$ avec $n \geq 1$ entier.

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$$

- Il s'agit de construire un algorithme de calcul de $S(n)$ : une méthode mécanique, étape par étape qui trouve le résultat correct.

- Problème : on souhaite calculer la somme $S(n)$ des entiers de 1 à $n$ avec $n \geq 1$ entier.

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$$

- Il s'agit de construire un algorithme de calcul de $S(n)$ : une méthode mécanique, étape par étape qui trouve le résultat correct.
- À partir de cet algorithme, on va coder la fonction S dans le langage choisi, ici Python.

- Problème : on souhaite calculer la somme $S(n)$ des entiers de 1 à $n$ avec $n \geq 1$ entier.

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$$

- Il s'agit de construire un algorithme de calcul de $S(n)$ : une méthode mécanique, étape par étape qui trouve le résultat correct.
- À partir de cet algorithme, on va coder la fonction S dans le langage choisi, ici Python.
- Ainsi, on obtient un programme, dont l'exécution sur ordinateur permet de calculer la fonction S.

- On veut calculer $S(1000)$. Calculer « à la main » sans utiliser d'astuce est facile, mais laborieux : $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000 = \ldots$

- On veut calculer $S(1000)$. Calculer « à la main » sans utiliser d'astuce est facile, mais laborieux : $1+2+3+\cdots+1000 = \dots$
- On veut donc le faire faire par un ordinateur. Il faut donc écrire un programme court qui explique à la machine comment procéder. Le programme doit marcher pour tous les $n$ entiers !

- On veut calculer $S(1000)$. Calculer « à la main » sans utiliser d'astuce est facile, mais laborieux : $1+2+3+\cdots+1000=\ldots$
- On veut donc le faire faire par un ordinateur. Il faut donc écrire un programme court qui explique à la machine comment procéder. Le programme doit marcher pour tous les $n$ entiers !
- Trois manières classiques pour calculer $S(n)$ :
  - le calcul direct,
  - la récurrence,
  - la boucle ou itération.

C'est la solution idéale, mais rarement possible.

- Nécessite une idée (un peu) astucieuse.
- Ici on a la formule :

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

# Formule astucieuse

C'est la solution idéale, mais rarement possible.

- Nécessite une idée (un peu) astucieuse.
- Ici on a la formule :

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

SCRIPT

```python
def S(n):
    return n*(n+1)//2
```

SHELL

```
>>>
```

# Formule astucieuse

C’est la solution idéale, mais rarement possible.

- Nécessite une idée (un peu) astucieuse.
- Ici on a la formule :

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

SCRIPT

```python
def S(n):
    return n*(n+1)//2
```

SHELL

```
>>> S(1000)
```

# Formule astucieuse

C'est la solution idéale, mais rarement possible.

- Nécessite une idée (un peu) astucieuse.
- Ici on a la formule :

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

SCRIPT

```python
def S(n):
    return n*(n+1)//2
```

SHELL

```
>>> S(1000)
500500
```

C'est la solution idéale, mais rarement possible.

- Nécessite une idée (un peu) astucieuse.
- Ici on a la formule :

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

SCRIPT

```python
def S(n):
    return n*(n+1)//2
```

SHELL

```
>>> S(1000)
500500
```

- Ce programme fonctionne pour toutes les valeurs de n.
- Il est de plus très rapide ; il ne nécessite que 3 opérations.

- Comme la récurrence mathématique, on résout un problème en le supposant résolu pour des cas plus simples.
- On veut calculer $S(n)$, on s'autorise à utiliser $S(k)$ pour $k < n$.

- Comme la récurrence mathématique, on résout un problème en le supposant résolu pour des cas plus simples.
- On veut calculer $S(n)$, on s'autorise à utiliser $S(k)$ pour $k < n$.

Cas typiques :

- $k = n - 1$
- $k = n//2$

- Comme la récurrence mathématique, on résout un problème en le supposant résolu pour des cas plus simples.
- On veut calculer $S(n)$, on s'autorise à utiliser $S(k)$ pour $k < n$.

Cas typiques :
- $k = n - 1$
- $k = n//2$

- On a :

$$S(n) = \underbrace{1 + 2 + \cdots + (n-1)}_{=S(n-1)} + n = S(n-1) + n$$

- Comme la récurrence mathématique, on résout un problème en le supposant résolu pour des cas plus simples.
- On veut calculer $S(n)$, on s'autorise à utiliser $S(k)$ pour $k < n$.

  Cas typiques :
  - $k = n - 1$
  - $k = n//2$
- On a :

$$S(n) = \underbrace{1 + 2 + \cdots + (n-1)}_{=S(n-1)} + n = S(n-1) + n$$

- Pour calculer $S(n)$, il suffit donc de calculer $S(n-1)$.

- Comme la récurrence mathématique, on résout un problème en le supposant résolu pour des cas plus simples.
- On veut calculer $S(n)$, on s'autorise à utiliser $S(k)$ pour $k < n$.

  Cas typiques :
  - $k = n - 1$
  - $k = n//2$
- On a :

$$S(n) = \underbrace{1 + 2 + \cdots + (n-1)}_{=S(n-1)} + n = S(n-1) + n$$

- Pour calculer $S(n)$, il suffit donc de calculer $S(n-1)$.
- Et comment calculer $S(n-1)$ ? À partir de $S(n-2)$

- Comme la récurrence mathématique, on résout un problème en le supposant résolu pour des cas plus simples.
- On veut calculer $S(n)$, on s'autorise à utiliser $S(k)$ pour $k < n$.

  Cas typiques :
  - $k = n - 1$
  - $k = n//2$
- On a :

$$S(n) = \underbrace{1 + 2 + \cdots + (n-1)}_{=S(n-1)} + n = S(n-1) + n$$

- Pour calculer $S(n)$, il suffit donc de calculer $S(n-1)$.
- Et comment calculer $S(n-1)$ ? À partir de $S(n-2)$
- Mais il faut s'arréter : on peut calculer $S(1)$ directement.

$$S(5) = S(5)$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = S(4) + 5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = S(4) + 5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = (S(3) + 4) + 5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = (S(3) + 4) + 5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = ((S(2) + 3) + 4) + 5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = ((S(2) + 3) + 4) + 5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = (((S(1)+2)+3)+4)+5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1)+2)+3)+4)+5$

$$S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = (((1 + 2) + 3) + 4) + 5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = (((1+2)+3)+4)+5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1)+2)+3)+4)+5$

$$S(5) = ((3 + 3) + 4) + 5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = ((3+3)+4)+5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1)+2)+3)+4)+5$

$$S(5) = (6 + 4) + 5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = (6+4)+5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4)+5$
- $S(4) = S(3)+4$
- $S(3) = S(2)+3$
- $S(2) = S(1)+2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1)+2)+3)+4)+5$

$$S(5) = 10 + 5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = 10 + 5$$

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

$$S(5) = 15$$

Ouf !

**On remplace successivement, les valeurs $S(n)$**

- $S(5) = S(4) + 5$
- $S(4) = S(3) + 4$
- $S(3) = S(2) + 3$
- $S(2) = S(1) + 2$
- Ici on peut s'arrêter car on a directement $S(1) = 1$

- On obtient alors $S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$

# Détail du calcul

$$S(5) = S(5)$$

$$S(5) = S(4) + 5$$

$$S(5) = S(4) + 5$$

$$S(5) = (S(3) + 4) + 5$$

$$S(5) = (S(3) + 4) + 5$$

$$S(5) = ((S(2) + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = ((S(2) + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = (((S(1) + 2) + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = (((1 + 2) + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = (((1 + 2) + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = ((3 + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = ((3 + 3) + 4) + 5$$

$$S(5) = (6 + 4) + 5$$

$$S(5) = (6 + 4) + 5$$

$$S(5) = 10 + 5$$

$$S(5) = 10 + 5$$

$$S(5) = 15$$

SCRIPT

```
def S(n):
    if n == 1: # Cas d'arrêt
        return 1
    else:
        return S(n-1) + n # Formule de récurrence
```

Dans un programme récursif il faut :

- Le cas d'arrêt
- La formule de récurrence

$$\begin{cases} S(1) & = 1 \\ S(n) & = S(n-1) + n \end{cases}$$

SCRIPT

```python
def S(n):
    if n == 1: # Cas d'arrêt
        return 1
    else:
        return S(n-1) + n # Formule de récurrence
```

Dans un programme récursif il faut :

- Le cas d'arrêt
- La formule de récurrence

$$\begin{cases} S(1) &= 1 \\ S(n) &= S(n-1) + n \end{cases}$$

- Un simple `if else` suffit alors.

```
def S(n):
    if n == 1: # Cas d'arrêt
        return 1
    else:
        return S(n-1) + n # Formule de récurrence
```

SCRIPT

Dans un programme récursif il faut :

- Le cas d'arrêt
- La formule de récurrence

$$\begin{cases} S(1) & = 1 \\ S(n) & = S(n-1)+n \end{cases}$$

- Un simple `if else` suffit alors.

- Python est mauvais pour la récursion : à éviter quand il y a trop d'appels récursifs...

On considère la suite $u_n$ arithmético-géométrique définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 & = 234 \\ u_{n+1} & = -\frac{8}{10} u_n + 3 \end{cases}$$

- Écrire une fonction récursive pour calculer $u_n$.
- Quelle semble être sa limite ? L'écrire sous forme de fraction.

Indice :

On considère la suite $u_n$ arithmético-géométrique définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 & = 234 \\ u_{n+1} & = -\frac{8}{10} u_n + 3 \end{cases}$$

- Écrire une fonction récursive pour calculer $u_n$.
- Quelle semble être sa limite ? L'écrire sous forme de fraction.

Essayez de résoudre la question seul avant de regarder l'indice

Indice :

On considère la suite $u_n$ arithmético-géométrique définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 & = 234 \\ u_{n+1} & = -\frac{8}{10}u_n + 3 \end{cases}$$

- Écrire une fonction récursive pour calculer $u_n$.
- Quelle semble être sa limite ? L'écrire sous forme de fraction.

Essayez de résoudre la question seul avant de regarder l'indice

Je suis sérieux, sortez votre Python et au boulot !

Indice :

On considère la suite $u_n$ arithmético-géométrique définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 & = 234 \\ u_{n+1} & = -\frac{8}{10} u_n + 3 \end{cases}$$

- Écrire une fonction récursive pour calculer $u_n$.
- Quelle semble être sa limite ? L'écrire sous forme de fraction.

Essayez de résoudre la question seul avant de regarder l'indice

Je suis sérieux, sortez votre Python et au boulot ! Maintenant !

Indice :

On considère la suite $u_n$ arithmético-géométrique définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 & = 234 \\ u_{n+1} & = -\dfrac{8}{10} u_n + 3 \end{cases}$$

- Écrire une fonction récursive pour calculer $u_n$.
- Quelle semble être sa limite ? L'écrire sous forme de fraction.

Indice : La récurrence peut s'écrire sous la forme $u_n = -0.8 u_{n-1} + 3$

# Sommaire

- Les boucles forment un mécanisme bien plus répandu pour le calcul.
- Pour calculer de tête $1+2+\cdots+5$ on passe par les résultats intermédiaires suivants :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "+2"'] & 3 \arrow[r, bend right, "+3"'] & 6 \arrow[r, bend right, "+4"'] & 10 \arrow[r, bend right, "+5"'] & 15 \end{tikzcd}$$

- Les boucles forment un mécanisme bien plus répandu pour le calcul.
- Pour calculer de tête $1+2+\cdots+5$ on passe par les résultats intermédiaires suivants :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "+2"'] & 3 \arrow[r, bend right, "+3"'] & 6 \arrow[r, bend right, "+4"'] & 10 \arrow[r, bend right, "+5"'] & 15 \end{tikzcd}$$

Variable `somme`

Variable `i`

- Il suffit de deux variables pour faire le calcul
  - Celle correspondant à la somme partielle :
  - Celle correspondant à ce qu'on ajoute :

- Les boucles forment un mécanisme bien plus répandu pour le calcul.
- Pour calculer de tête $1+2+\cdots+5$ on passe par les résultats intermédiaires suivants :

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15$$

Variable `somme`

Variable `i`

- Il suffit de deux variables pour faire le calcul
  - Celle correspondant à la somme partielle :
  - Celle correspondant à ce qu'on ajoute :

SCRIPT

```
somme = somme+i
i = i+1
```

Variable `somme` $1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15$

Variable `i`

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| `somme` | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
| `i` | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

## Début, corps de boucle et fin



Variable `somme` $1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15$

Variable `i`

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| `somme` | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
| `i` | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**

```
somme=1
i=2
```

Variable `somme` 1 → 3 → 6 → 10 → 15

Variable `i` $+2$ $+3$ $+4$ $+5$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| `somme` | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
| `i` | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**

```
somme=1
i=2
```

```
somme=somme+i
i=i+1
```

# Début, corps de boucle et fin



Variable `somme` $\quad 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15$

Variable `i`

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| `somme` | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
| `i` | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**

```
somme=1
i=2
```

```
i<=5 ?
```

```
somme=somme+i
i=i+1
```

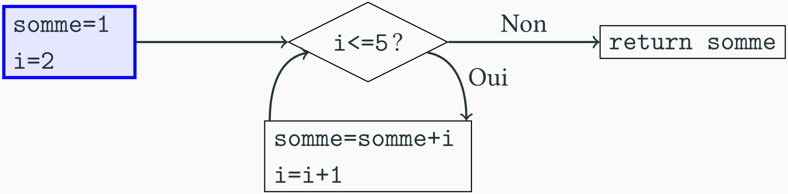
# Début, corps de boucle et fin

Variable `somme` 1 3 6 10 15

Variable `i` +2 +3 +4 +5

| `somme` | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| `i` | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**

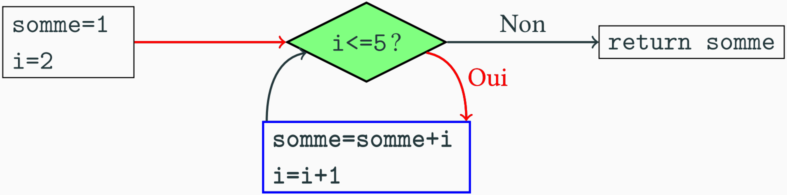


Variable `somme` 1 3 6 10 15

Variable `i` +2 +3 +4 +5

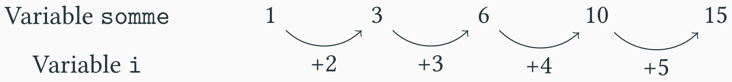
| `somme` | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| `i` | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**



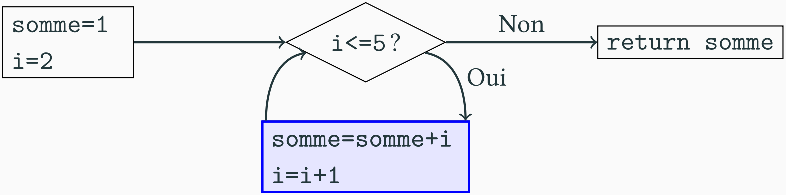
# Début, corps de boucle et fin





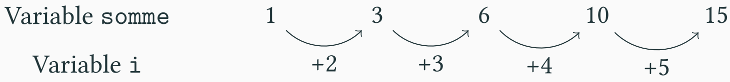

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| somme | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
| i | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**



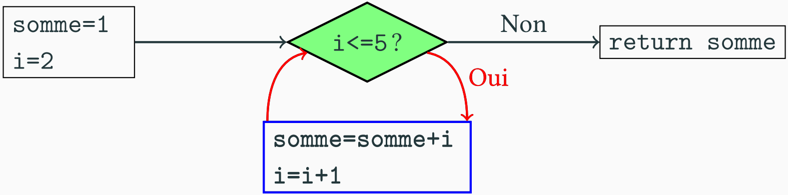
# Début, corps de boucle et fin






| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| `somme` | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
| `i` | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**

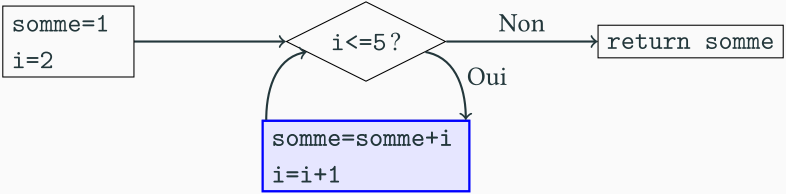


Variable `somme`   1 → 3 → 6 → 10 → 15

Variable `i`   +2   +3   +4   +5

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| `somme` | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
| `i` | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**



## Début, corps de boucle et fin

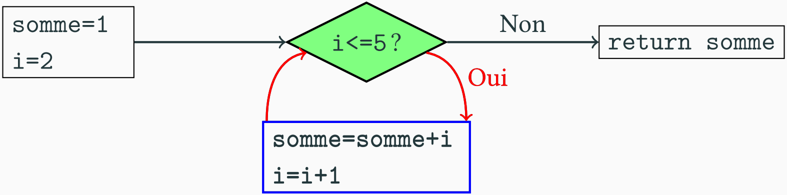


Variable `somme` 1 3 6 10 15

Variable `i` +2 +3 +4 +5

| `somme` | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| `i` | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**

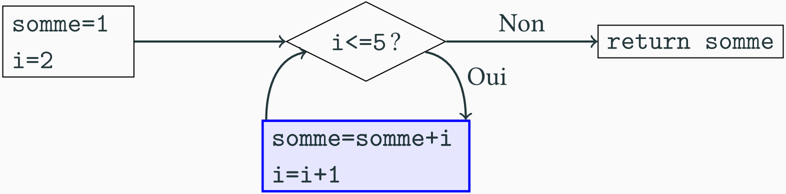


Variable `somme` : 1 → 3 → 6 → 10 → 15

Variable `i` : +2, +3, +4, +5

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| `somme` | 1 | 3 | 6 | **10** | 15 |
| `i` | 2 | 3 | 4 | **5** | 6 |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**



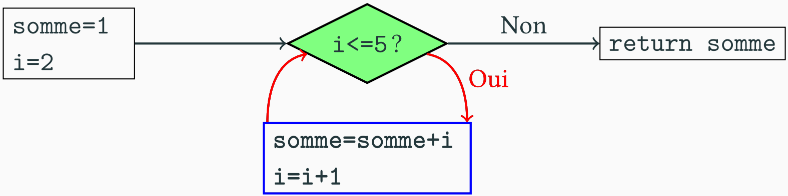
# Début, corps de boucle et fin

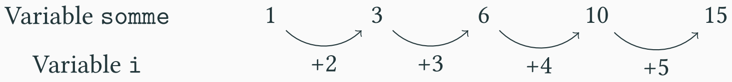
Variable `somme` 1 3 6 10 15

Variable `i` +2 +3 +4 +5

| `somme` | 1 | 3 | 6 | **10** | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| `i` | 2 | 3 | 4 | **5** | 6 |

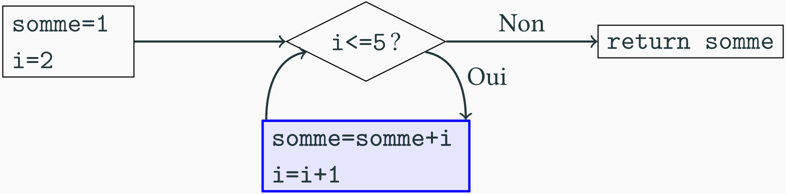
- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**






| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| `somme` | 1 | 3 | 6 | 10 | **15** |
| `i` | 2 | 3 | 4 | 5 | **6** |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**



## Début, corps de boucle et fin

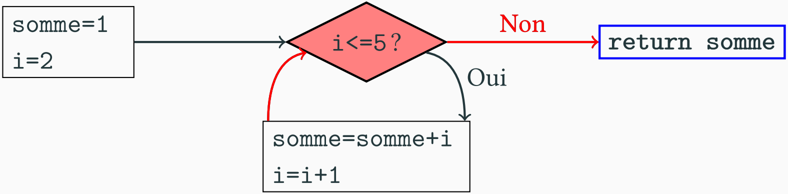


Variable `somme` 1 3 6 10 15

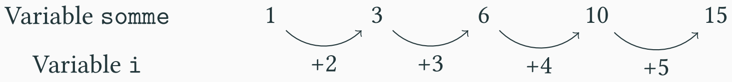
Variable `i` +2 +3 +4 +5

| somme | 1 | 3 | 6 | 10 | **15** |
|---|---|---|---|---|---|
| i | 2 | 3 | 4 | 5 | **6** |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**

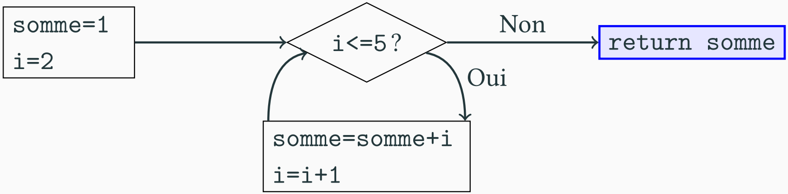


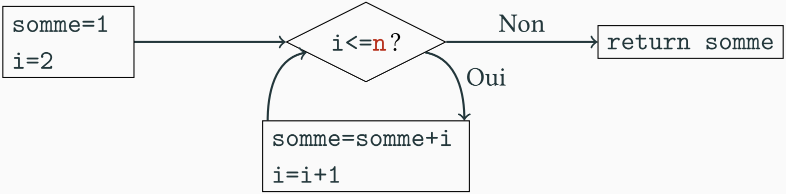
# Début, corps de boucle et fin




| `somme` | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| `i` | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Il faut créer les variables : **Initialisation**
- Préciser le calcul que l'on répétera : **Corps de boucle**
- Tester si l'on doit répéter le calcul ou non : **Test**






- Pour cela on utilise une boucle `while` (tant que)

SCRIPT

```
def S(n):
    somme=1          # initialisation
    i=2              # initialisation
    while i<=n:      # condition
        somme=somme+i # corps de boucle
        i=i+1        # corps de boucle
    return somme
```

- L'ordre des instructions compte ! On commence avec `i=2` et `somme=1`.

SCRIPT
```
somme = somme+i
i = i+1
```

SCRIPT
```
i = i+1
somme = somme+i
```

- L'ordre des instructions compte ! On commence avec `i=2` et `somme=1`.

SCRIPT
```
somme = somme+i
i = i+1
```

SCRIPT
```
i = i+1
somme = somme+i
```

  - `i==2` et `somme==3`

- L'ordre des instructions compte ! On commence avec `i=2` et `somme=1`.

SCRIPT
```
somme = somme+i
i = i+1
```

SCRIPT
```
i = i+1
somme = somme+i
```

  - `i==2` et `somme==3`
  - `i==3` et `somme==3`

# Corps de boucle : se tromper et comprendre

- L'ordre des instructions compte ! On commence avec `i=2` et `somme=1`.

```
somme = somme+i
i = i+1
```
SCRIPT

- `i==2` et `somme==3`
- `i==3` et `somme==3`

```
i = i+1
somme = somme+i
```
SCRIPT

- `i==3` et `somme==1`

- L'ordre des instructions compte ! On commence avec `i=2` et `somme=1`.

SCRIPT
```
somme = somme+i
i = i+1
```

- `i==2` et `somme==3`
- `i==3` et `somme==3`

SCRIPT
```
i = i+1
somme = somme+i
```

- `i==3` et `somme==1`
- `i==3` et `somme==4`

- L'ordre des instructions compte ! On commence avec `i=2` et `somme=1`.

SCRIPT
```
somme = somme+i
i = i+1
```

  - `i==2` et `somme==3`
  - `i==3` et `somme==3`

SCRIPT
```
i = i+1
somme = somme+i
```

  - `i==3` et `somme==1`
  - `i==3` et `somme==4`

- Pour comprendre ce que fait une boucle, on peut utiliser des `print`.

SCRIPT
```
def S(n):
    somme=1
    i=2
    while i<=5:
        i=i+1
        somme=somme+i
        print('i =',i, 'et somme =',somme)
    return somme
```

SHELL
```
>>>
```

- L'ordre des instructions compte ! On commence avec `i=2` et `somme=1`.

```
somme = somme+i
i = i+1
```
SCRIPT

  - `i==2` et `somme==3`
  - `i==3` et `somme==3`

```
i = i+1
somme = somme+i
```
SCRIPT

  - `i==3` et `somme==1`
  - `i==3` et `somme==4`

- Pour comprendre ce que fait une boucle, on peut utiliser des `print`.

```
def S(n):
    somme=1
    i=2
    while i<=5:
        i=i+1
        somme=somme+i
        print('i =',i, 'et somme =',somme)
    return somme
```
SCRIPT

```
>>> S(5)
```
SHELL

- L'ordre des instructions compte ! On commence avec `i=2` et `somme=1`.

```
somme = somme+i
i = i+1
```
SCRIPT

- `i==2` et `somme==3`
- `i==3` et `somme==3`

```
i = i+1
somme = somme+i
```
SCRIPT

- `i==3` et `somme==1`
- `i==3` et `somme==4`

- Pour comprendre ce que fait une boucle, on peut utiliser des `print`.

```
def S(n):
    somme=1
    i=2
    while i<=5:
        i=i+1
        somme=somme+i
        print('i =',i, 'et somme =',somme)
    return somme
```
SCRIPT

```
>>> S(5)
i = 3 et somme = 4
i = 4 et somme = 8
i = 5 et somme = 13
i = 6 et somme = 19
19
```
SHELL

- La condition est fondementale ! C'est une grande source de bogue.
- Si la condition est toujours vérifiée, on ne sort jamais de la boucle.

SCRIPT
```
i=3
while i<=5:
    i=i-1
```

- Une seule solution :

- La condition est fondementale ! C'est une grande source de bogue.
- Si la condition est toujours vérifiée, on ne sort jamais de la boucle.

SCRIPT

```
i=3
while i<=5:
    i=i-1
```

- Une seule solution : la manifestation !

- La condition est fondementale ! C'est une grande source de bogue.
- Si la condition est toujours vérifiée, on ne sort jamais de la boucle.

SCRIPT

```
i=3
while i<=5:
    i=i-1
```

- Une seule solution : ~~la manifestation !~~ le raccourci Ctrl + C

- La condition est fondementale ! C'est une grande source de bogue.
- Si la condition est toujours vérifiée, on ne sort jamais de la boucle.

SCRIPT
```
i=3
while i<=5:
    i=i-1
```

- Une seule solution : ~~la manifestation !~~ le raccourci Ctrl + C

## Synthèse

SCRIPT
```
initialisation # Initialisation des
initialisation # variables de boucle
while conditons:
    instruction # Corps de boucle executé
    instruction # tant que le Test est valide
instruction # Lignes executées
instruction # dans tous les cas
```

Écrire une fonction `table_multiplication(n)` qui affiche la table de `n`.

SHELL
```
>>>
```

Écrire une fonction `table_multiplication(n)` qui affiche la table de `n`.

```
>>> table_multiplication(11)
```

SHELL

Écrire une fonction `table_multiplication(n)` qui affiche la table de `n`.

SHELL

```
>>> table_multiplication(11)
0 * 11 = 0
1 * 11 = 11
2 * 11 = 22
3 * 11 = 33
4 * 11 = 44
5 * 11 = 55
6 * 11 = 66
7 * 11 = 77
8 * 11 = 88
9 * 11 = 99
10 * 11 = 110
```

## Sommaire

# Définition

- On dit qu'un entier naturel $n$ est premier s'il a exactement deux diviseurs positifs : 1 et $n$.
  - Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
- Il y a une infinité de nombres premiers (*cf.* Euclide).

- On dit qu'un entier naturel $n$ est premier s'il a exactement deux diviseurs positifs : 1 et $n$.
    - Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …
- Il y a une infinité de nombres premiers (*cf.* Euclide).
- Si $n$ n'est pas premier,
    - alors $n$ admet une diviseur $d$, avec $1 < d < n$.
    - dans ce cas, puisque $d$ divise $n$ on a `n%d == 0` ($d \neq 0$).

- On dit qu'un entier naturel $n$ est premier s'il a exactement deux diviseurs positifs : 1 et $n$.
    - Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
- Il y a une infinité de nombres premiers (*cf.* Euclide).
- Si $n$ n'est pas premier,
    - alors $n$ admet une diviseur $d$, avec $1 < d < n$.
    - dans ce cas, puisque $d$ divise $n$ on a `n%d == 0` ($d \neq 0$).
- Exemple : 2021027 n'est pas premier. En effet,

SHELL
```
>>>
```

- On dit qu'un entier naturel $n$ est premier s'il a exactement deux diviseurs positifs : 1 et $n$.
    - Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
- Il y a une infinité de nombres premiers (*cf.* Euclide).
- Si $n$ n'est pas premier,
    - alors $n$ admet une diviseur $d$, avec $1 < d < n$.
    - dans ce cas, puisque $d$ divise $n$ on a `n%d == 0` ($d \neq 0$).
- Exemple : 2021027 n'est pas premier. En effet,

SHELL

```
>>> 2021027 % 1009
```

- On dit qu'un entier naturel $n$ est premier s'il a exactement deux diviseurs positifs : 1 et $n$.
  - Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
- Il y a une infinité de nombres premiers (*cf.* Euclide).
- Si $n$ n'est pas premier,
  - alors $n$ admet une diviseur $d$, avec $1 < d < n$.
  - dans ce cas, puisque $d$ divise $n$ on a `n%d == 0` ($d \neq 0$).
- Exemple : 2021027 n'est pas premier. En effet,

SHELL
```
>>> 2021027 % 1009
0
```

# Un algorithme naïf

- Tester si un nombre d divise n pour 1<d<n.

SCRIPT

```
def est_premier(n):
    if n<2:
        return False
    d = 2
    while n%d != 0:
        d = d+1
    # on est sorti de la boucle, si c'est pour d == n,
    # alors n est premier
    return d == n
```

- Tester si un nombre d divise n pour 1<d<n.

SCRIPT

```python
def est_premier(n):
    if n<2:
        return False
    d = 2
    while n%d != 0:
        d = d+1
    # on est sorti de la boucle, si c'est pour d == n,
    # alors n est premier
    return d == n
```

- Problème : lent car pas malin (on teste trop de diviseurs d).

- (1) Si $n$ est pair, il est premier seulement si $n = 2$

- (1) Si $n$ est pair, il est premier seulement si $n = 2$
- (2) Si $n$ est impair, ses seuls diviseurs sont impairs.

# Un algorithme moins naïf

- (1) Si $n$ est pair, il est premier seulement si $n = 2$
- (2) Si $n$ est impair, ses seuls diviseurs sont impairs.

- si $n$ n'est pas premier,
  - il possède un plus petit diviseur premier $d$
  - $n$ s'écrit alors $n = d \cdot m$ avec $d \leq m$.
  - $d \cdot d \leq d \cdot m = n$

- (1) Si $n$ est pair, il est premier seulement si $n = 2$
- (2) Si $n$ est impair, ses seuls diviseurs sont impairs.

- si $n$ n'est pas premier,
  - il possède un plus petit diviseur premier $d$
  - $n$ s'écrit alors $n = d \cdot m$ avec $d \leq m$.
  - $d \cdot d \leq d \cdot m = n$

SCRIPT

```
def est_premier(n):
    if n < 2:
        return False
    elif n%2 == 0:
        return n == 2 # Astuce (1)
    else:
        d = 3 # on test seulement les d impairs (2)
        while d*d <= n and n%d != 0:
            d = d+2 # si d est impair, d+2 est le suivant (2)

        # on est sorti de la boucle, si d*d > n,
        # alors n est premier
        return d*d > n
```

- (1) Si $n$ est pair, il est premier seulement si $n = 2$
- (2) Si $n$ est impair, ses seuls diviseurs sont impairs.

- si $n$ n'est pas premier,
  - il possède un plus petit diviseur premier $d$
  - $n$ s'écrit alors $n = d \cdot m$ avec $d \leq m$.
  - $d \cdot d \leq d \cdot m = n$

SCRIPT

```
def est_premier(n):
    if n < 2:
        return False
    elif n%2 == 0:
        return n == 2 # Astuce (1)
    else:
        d = 3 # on test seulement les d impairs (2)
        while d*d <= n and n%d != 0:
            d = d+2 # si d est impair, d+2 est le suivant (2)

        # on est sorti de la boucle, si d*d > n,
        # alors n est premier
        return d*d > n
```

- Mieux mais loin d'être optimal. Il existe des tests probabilistes ou déterministes efficaces. Le module `sympy` fournit la fonction `isprime`.

- Pour un entier `n>1`, on cherche le plus petit `d>1` tel que `d` divise `n`.

- Pour un entier n>1, on cherche le plus petit d>1 tel que d divise n.

SCRIPT

```
def plus_petit_facteur(n):
    d = 2
    while n%d != 0:
        d = d + 1
    return d
```

- Pour un entier `n>1`, on cherche le plus petit `d>1` tel que `d` divise `n`.

SCRIPT

```
def plus_petit_facteur(n):
    d = 2
    while n%d != 0:
        d = d + 1
    return d
```

- Remarque `plus_petit_facteur(n)` renvoie un nombre premier.

▸ Pour un entier n>1, on cherche le plus petit d>1 tel que d divise n.

SCRIPT

```
def plus_petit_facteur(n):
    d = 2
    while n%d != 0:
        d = d + 1
    return d
```

▸ Remarque `plus_petit_facteur(n)` renvoie un nombre premier.

▸ Comme pour tester si n est premier, cet algorithme est naïf. On peut l'améliorer avec les mêmes techniques que précédemment.

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
  - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
  - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL

```
>>>
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
  - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
  - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL

```
>>> 5/2
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
    - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
    - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL

```
>>> 5/2
2.5
>>>
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
    - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
    - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL

```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
  - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
  - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL

```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>>
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
  - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
  - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL

```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>> 2.5 * 10**50 #  Les puissances de 10 sont notées avec  e+
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
    - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
    - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL

```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>> 2.5 * 10**50 #  Les puissances de 10 sont notées avec  e+
2.5e+50
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
    - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
    - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL

```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>> 2.5 * 10**50 #  Les puissances de 10 sont notées avec  e+
2.5e+50
```

- On utilise un point au lieu d'une virgule

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
  - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
  - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL
```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>> 2.5 * 10**50 #  Les puissances de 10 sont notées avec  e+
2.5e+50
```

- On utilise un point au lieu d'une virgule

- Les flottants n'ont qu'un nombre limité de chiffres après la virgule.

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
  - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
  - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL
```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>> 2.5 * 10**50 #  Les puissances de 10 sont notées avec  e+
2.5e+50
```

- On utilise un point au lieu d'une virgule

- Les flottants n'ont qu'un nombre limité de chiffres après la virgule.

- On n'aura qu'une approximation de $\pi$ et $\sqrt{2}$. Ce qui largement suffisant pour des calculs pratiques.

SHELL
```
>>>
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
  - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
  - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL

```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>> 2.5 * 10**50 #  Les puissances de 10 sont notées avec  e+
2.5e+50
```

- On utilise un point au lieu d'une virgule
- Les flottants n'ont qu'un nombre limité de chiffres après la virgule.
- On n'aura qu'une approximation de $\pi$ et $\sqrt{2}$. Ce qui largement suffisant pour des calculs pratiques.

SHELL

```
>>> import math
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
    - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
    - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL
```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>> 2.5 * 10**50 #  Les puissances de 10 sont notées avec  e+
2.5e+50
```

- On utilise un point au lieu d'une virgule

- Les flottants n'ont qu'un nombre limité de chiffres après la virgule.

- On n'aura qu'une approximation de $\pi$ et $\sqrt{2}$. Ce qui largement suffisant pour des calculs pratiques.

SHELL
```
>>> import math
>>>
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
  - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
  - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL
```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>> 2.5 * 10**50 #  Les puissances de 10 sont notées avec  e+
2.5e+50
```

- On utilise un point au lieu d'une virgule

- Les flottants n'ont qu'un nombre limité de chiffres après la virgule.

- On n'aura qu'une approximation de $\pi$ et $\sqrt{2}$. Ce qui largement suffisant pour des calculs pratiques.

SHELL
```
>>> import math
>>> math.pi
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
  - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
  - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL

```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>> 2.5 * 10**50 #  Les puissances de 10 sont notées avec  e+
2.5e+50
```

- On utilise un point au lieu d'une virgule

- Les flottants n'ont qu'un nombre limité de chiffres après la virgule.

- On n'aura qu'une approximation de $\pi$ et $\sqrt{2}$. Ce qui largement suffisant pour des calculs pratiques.

SHELL

```
>>> import math
>>> math.pi
3.141592653589793
>>>
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
    - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
    - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL
```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>> 2.5 * 10**50 #  Les puissances de 10 sont notées avec  e+
2.5e+50
```

- On utilise un point au lieu d'une virgule

- Les flottants n'ont qu'un nombre limité de chiffres après la virgule.

- On n'aura qu'une approximation de $\pi$ et $\sqrt{2}$. Ce qui largement suffisant pour des calculs pratiques.

SHELL
```
>>> import math
>>> math.pi
3.141592653589793
>>> math.sqrt(2)
```

- On code les décimaux avec la notation à virgule flottante :
    - Il est impossible de représenter de façon exacte tous les nombres réels.
    - On parle de flottants (pour nombre à virgule flottante). En anglais : *float*.

SHELL

```
>>> 5/2
2.5
>>> 2/3
0.6666666666666666
>>> 2.5 * 10**50 #  Les puissances de 10 sont notées avec  e+
2.5e+50
```

- On utilise un point au lieu d'une virgule

- Les flottants n'ont qu'un nombre limité de chiffres après la virgule.

- On n'aura qu'une approximation de $\pi$ et $\sqrt{2}$. Ce qui largement suffisant pour des calculs pratiques.

SHELL

```
>>> import math
>>> math.pi
3.141592653589793
>>> math.sqrt(2)
1.4142135623730951
```

▸ Le calcul sur les nombres flottants est inexact, on évitera de tester l'égalité de tels nombres.

SHELL
```
>>>
```

- Le calcul sur les nombres flottants est inexact, on évitera de tester l'égalité de tels nombres.

SHELL

```
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.4
```

- Le calcul sur les nombres flottants est inexact, on évitera de tester l’égalité de tels nombres.

SHELL
```
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.4
True
>>>
```

- Le calcul sur les nombres flottants est inexact, on évitera de tester l’égalité de tels nombres.

SHELL

```
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.4
True
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.3
```

- Le calcul sur les nombres flottants est inexact, on évitera de tester l'égalité de tels nombres.

SHELL
```
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.4
True
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.3
False
```

- Le calcul sur les nombres flottants est inexact, on évitera de tester l'égalité de tels nombres.

SHELL
```
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.4
True
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.3
False
```

- On peut prédire le nombre de décimales exactes, mais c'est difficile (voire très difficile) en général.

- Le calcul sur les nombres flottants est inexact, on évitera de tester l'égalité de tels nombres.

SHELL
```
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.4
True
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.3
False
```

- On peut prédire le nombre de décimales exactes, mais c'est difficile (voire très difficile) en général.
- Que faire ? Remplacer l'égalité par une précision $h$

- Le calcul sur les nombres flottants est inexact, on évitera de tester l'égalité de tels nombres.

SHELL

```
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.4
True
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.3
False
```

- On peut prédire le nombre de décimales exactes, mais c'est difficile (voire très difficile) en général.

- Que faire ? Remplacer l'égalité par une précision `h`

SCRIPT

```
     # a et b flottant
a==b # Déconseillé car dangereux

h=.0001
abs(a-b) < h # Oui
abs(a) < h   # signifie a est presque nul
```

- Quels sont les nombres avec une quantité de chiffres finie après la virgule ?
    - Nombre décimal : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 10.
    - Nombre dyadique : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 2.

- Quels sont les nombres avec une quantité de chiffres finie après la virgule ?
  - Nombre décimal : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 10.
  - Nombre dyadique : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 2.
- Les flottants sont des nombres dyadiques (un nombre rond pour nous n'est pas forcément rond pour la machine).

$$0,1 = 0,00011001100110011\ldots_2$$

- Quels sont les nombres avec une quantité de chiffres finie après la virgule ?
    - Nombre décimal : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 10.
    - Nombre dyadique : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 2.
- Les flottants sont des nombres dyadiques (un nombre rond pour nous n'est pas forcément rond pour la machine).

$$0,1 = 0,00011001100110011\ldots_2$$

- Python n'affiche qu'une valeur approchée de la valeur interne.

SHELL
```
>>>
```

- Quels sont les nombres avec une quantité de chiffres finie après la virgule ?
    - Nombre décimal : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 10.
    - Nombre dyadique : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 2.
- Les flottants sont des nombres dyadiques (un nombre rond pour nous n'est pas forcément rond pour la machine).

$$0,1 = 0,00011001100110011\ldots_2$$

- Python n'affiche qu'une valeur approchée de la valeur interne.

SHELL
```
>>> 0.1
```

- Quels sont les nombres avec une quantité de chiffres finie après la virgule ?
  - Nombre décimal : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 10.
  - Nombre dyadique : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 2.
- Les flottants sont des nombres dyadiques (un nombre rond pour nous n'est pas forcément rond pour la machine).

$$0,1 = 0,00011001100110011\ldots_2$$

- Python n'affiche qu'une valeur approchée de la valeur interne.

SHELL

```
>>> 0.1
0.1
>>>
```

- Quels sont les nombres avec une quantité de chiffres finie après la virgule ?
    - Nombre décimal : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 10.
    - Nombre dyadique : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 2.
- Les flottants sont des nombres dyadiques (un nombre rond pour nous n'est pas forcément rond pour la machine).

$$0,1 = 0,00011001100110011\ldots_2$$

- Python n'affiche qu'une valeur approchée de la valeur interne.

SHELL
```
>>> 0.1
0.1
>>> from decimal import Decimal
```

- Quels sont les nombres avec une quantité de chiffres finie après la virgule ?
    - Nombre décimal : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 10.
    - Nombre dyadique : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 2.
- Les flottants sont des nombres dyadiques (un nombre rond pour nous n'est pas forcément rond pour la machine).

$$0,1 = 0,00011001100110011\ldots_2$$

- Python n'affiche qu'une valeur approchée de la valeur interne.

SHELL

```
>>> 0.1
0.1
>>> from decimal import Decimal
>>>
```

- Quels sont les nombres avec une quantité de chiffres finie après la virgule ?
    - Nombre décimal : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 10.
    - Nombre dyadique : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 2.
- Les flottants sont des nombres dyadiques (un nombre rond pour nous n'est pas forcément rond pour la machine).

$$0,1 = 0,000110011001100110011\ldots_2$$

- Python n'affiche qu'une valeur approchée de la valeur interne.

SHELL
```
>>> 0.1
0.1
>>> from decimal import Decimal
>>> Decimal(0.1)
```

- Quels sont les nombres avec une quantité de chiffres finie après la virgule ?
    - Nombre décimal : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 10.
    - Nombre dyadique : nombre ayant un nombre fini de chiffre en base 2.

- Les flottants sont des nombres dyadiques (un nombre rond pour nous n'est pas forcément rond pour la machine).

$$0,1 = 0,00011001100110011\ldots_2$$

- Python n'affiche qu'une valeur approchée de la valeur interne.

SHELL

```
>>> 0.1
0.1
>>> from decimal import Decimal
>>> Decimal(0.1)
Decimal('0.1000000000000000055511151231257827021181583404541015625')
```

# Sommaire

- On veut calculer la racine carrée approchée d'un nombre réel quelconque, par exemple calculer $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ sans utiliser `math.sqrt`.

# Méthode de Newton : principe

- On veut calculer la racine carrée approchée d'un nombre réel quelconque, par exemple calculer $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ sans utiliser `math.sqrt`.
- Méthode de Newton (1669) :

$$b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{r}{a}\right)$$

*Si $a$ est une approximation de $\sqrt{r}$ alors $b$ est une meilleure approximation. (cf explications en TP).*

# Méthode de Newton : principe

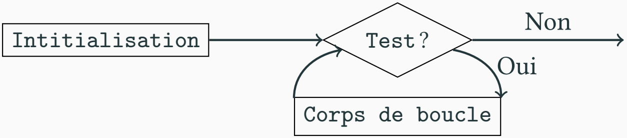


- On veut calculer la racine carrée approchée d'un nombre réel quelconque, par exemple calculer $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ sans utiliser `math.sqrt`.
- Méthode de Newton (1669) :

$$b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{r}{a}\right)$$

*Si $a$ est une approximation de $\sqrt{r}$ alors $b$ est une meilleure approximation. (cf explications en TP).*

- Trois questions pour coder l'algorithme :




  - Comment améliorer l'approximation courante ? (corps de boucle)
  - Mon approximation est-elle suffisante ? (test)
  - Quelle première approximation choisir ? (initialisation)

- **Comment améliorer l'approximation courante ?** (corps de boucle)

- **Comment améliorer l'approximation courante ?** (corps de boucle)
  - Il suffit d'utiliser la formule de Newton (en remplaçant $b$ par $a$)

SCRIPT
```
a = 0.5 * (a + r/a)
```

- **Comment améliorer l'approximation courante ?** (corps de boucle)
  - Il suffit d'utiliser la formule de Newton (en remplaçant $b$ par $a$)

SCRIPT
```
a = 0.5 * (a + r/a)
```

- **Mon approximation est-elle suffisante ?** (test)

# Méthode de Newton : analyse

- **Comment améliorer l'approximation courante ?** (corps de boucle)
  - Il suffit d'utiliser la formule de Newton (en remplaçant $b$ par $a$)

SCRIPT
```
a = 0.5 * (a + r/a)
```

- **Mon approximation est-elle suffisante ?** (test)
  - On s'arrête lorsque l'écart avec $\sqrt{r}$ est suffisement petit (on prend $h$ petit)

$$a \approx \sqrt{r} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \approx r \quad \Leftrightarrow \quad |a^2 - r| < h$$

- **Comment améliorer l'approximation courante ?** (corps de boucle)
  - Il suffit d'utiliser la formule de Newton (en remplaçant $b$ par $a$)

```
a = 0.5 * (a + r/a)
```
SCRIPT

- **Mon approximation est-elle suffisante ?** (test)
  - On s'arrête lorsque l'écart avec $\sqrt{r}$ est suffisement petit (on prend $h$ petit)

$$a \approx \sqrt{r} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \approx r \quad \Leftrightarrow \quad |a^2 - r| < h$$

  - Cela veut dire que l'on doit continuer tant que :

```
abs(a*a - r) >= h
```
SCRIPT

# Méthode de Newton : analyse

- **Comment améliorer l'approximation courante ?** (corps de boucle)
  - Il suffit d'utiliser la formule de Newton (en remplaçant $b$ par $a$)

```
a = 0.5 * (a + r/a)
```
SCRIPT

- **Mon approximation est-elle suffisante ?** (test)
  - On s'arrête lorsque l'écart avec $\sqrt{r}$ est suffisement petit (on prend $h$ petit)

$$a \approx \sqrt{r} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \approx r \quad \Leftrightarrow \quad |a^2 - r| < h$$

  - Cela veut dire que l'on doit continuer tant que :

```
abs(a*a - r) >= h
```
SCRIPT

- **Quelle première approximation choisir ?** (initialisation)

- **Comment améliorer l'approximation courante ?** (corps de boucle)
  - Il suffit d'utiliser la formule de Newton (en remplaçant $b$ par $a$)

```
a = 0.5 * (a + r/a)
```
SCRIPT

- **Mon approximation est-elle suffisante ?** (test)
  - On s'arrête lorsque l'écart avec $\sqrt{r}$ est suffisement petit (on prend $h$ petit)

$$a \approx \sqrt{r} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \approx r \quad \Leftrightarrow \quad |a^2 - r| < h$$

  - Cela veut dire que l'on doit continuer tant que :

```
abs(a*a - r) >= h
```
SCRIPT

- **Quelle première approximation choisir ?** (initialisation)
  - On peut prouver que n'importe quelle valeur strictement positive convient.

```
a=1
```
SCRIPT

SCRIPT
```
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme.

SHELL
```
>>>
```

# Méthode de Newton : programme

SCRIPT

```
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme.

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
```

SCRIPT

```python
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme.

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
>>>
```

SCRIPT

```python
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme.

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
>>> r2 = racine(2,h)
```

SCRIPT

```
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme. (Quatre itérations seulement ont suffi)

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
>>> r2 = racine(2,h)
a =  1
a =  1.5
a =  1.4166666666666665
a =  1.4142156862745097
>>>
```

SCRIPT

```
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme. (Quatre itérations seulement ont suffi)

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
>>> r2 = racine(2,h)
a =  1
a =  1.5
a =  1.4166666666666665
a =  1.4142156862745097
>>> from math import sqrt
```

SCRIPT

```python
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme. (Quatre itérations seulement ont suffi)

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
>>> r2 = racine(2,h)
a =  1
a =  1.5
a =  1.4166666666666665
a =  1.4142156862745097
>>> from math import sqrt
>>>
```

SCRIPT

```
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme. (Quatre itérations seulement ont suffi)

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
>>> r2 = racine(2,h)
a =  1
a =  1.5
a =  1.4166666666666665
a =  1.4142156862745097
>>> from math import sqrt
>>> sqrt(2) # La version Python plus précise
```

SCRIPT

```python
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme. (Quatre itérations seulement ont suffi)

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
>>> r2 = racine(2,h)
a =  1
a =  1.5
a =  1.4166666666666665
a =  1.4142156862745097
>>> from math import sqrt
>>> sqrt(2) # La version Python plus précise
1.4142135623730951
>>>
```

SCRIPT

```python
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme. (Quatre itérations seulement ont suffi)

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
>>> r2 = racine(2,h)
a =  1
a =  1.5
a =  1.4166666666666665
a =  1.4142156862745097
>>> from math import sqrt
>>> sqrt(2) # La version Python plus précise
1.4142135623730951
>>> r2
```

# Méthode de Newton : programme

SCRIPT

```
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme. (Quatre itérations seulement ont suffi)

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
>>> r2 = racine(2,h)
a =  1
a =  1.5
a =  1.4166666666666665
a =  1.4142156862745097
>>> from math import sqrt
>>> sqrt(2) # La version Python plus précise
1.4142135623730951
>>> r2
1.414213562374689
>>>
```

# Méthode de Newton : programme

SCRIPT

```python
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme. (Quatre itérations seulement ont suffi)

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
>>> r2 = racine(2,h)
a =  1
a =  1.5
a =  1.4166666666666665
a =  1.4142156862745097
>>> from math import sqrt
>>> sqrt(2) # La version Python plus précise
1.4142135623730951
>>> r2
1.4142135623746899
>>> abs(sqrt(2)-r2)
```

SCRIPT

```
def racine(r,h): # on suppose r>0 et h>0 petit
    a = 1
    while abs(a*a - r) >= h:
        print('a = ', a) # juste pour voir !
        a = 0.5 * (a + r / a)
    return a
```

- Testons notre programme. (Quatre itérations seulement ont suffi)

SHELL

```
>>> h=10**-10 # h = 0.00000 00000 1
>>> r2 = racine(2,h)
a =  1
a =  1.5
a =  1.4166666666666665
a =  1.4142156862745097
>>> from math import sqrt
>>> sqrt(2) # La version Python plus précise
1.4142135623730951
>>> r2
1.4142135623746899
>>> abs(sqrt(2)-r2)
1.5947243525715749e-12
```

# Algorithme d'Euclide : principe



- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

# Algorithme d'Euclide : principe

- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

$$\text{PGCD}(4,6) = 2 \qquad \text{car} \qquad 4 = 2 \times 2 \qquad \text{et} \qquad 6 = 2 \times 3$$

- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

$$\begin{array}{lllll} \text{PGCD}(4,6) = 2 & \text{car} & 4 = 2 \times 2 & \text{et} & 6 = 2 \times 3 \\ \text{PGCD}(10,15) = 5 & \text{car} & 10 = 5 \times 2 & \text{et} & 15 = 5 \times 3 \end{array}$$

- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| PGCD(4,6) = 2 | car | $4 = 2 \times 2$ | et | $6 = 2 \times 3$ |
| PGCD(10,15) = 5 | car | $10 = 5 \times 2$ | et | $15 = 5 \times 3$ |
| PGCD(0,8) = 8 | car | $0 = 8 \times 0$ | et | $8 = 8 \times 1$ |

# Algorithme d'Euclide : principe

- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

$$
\begin{array}{lllll}
\mathrm{PGCD}(4,6) = 2 & \text{car} & 4 = 2 \times 2 & \text{et} & 6 = 2 \times 3 \\
\mathrm{PGCD}(10,15) = 5 & \text{car} & 10 = 5 \times 2 & \text{et} & 15 = 5 \times 3 \\
\mathrm{PGCD}(0,8) = 8 & \text{car} & 0 = 8 \times 0 & \text{et} & 8 = 8 \times 1
\end{array}
$$

- L'algorithme d'Euclide calcule le PGCD de deux entiers naturels $a$ et $b$.
  - ($d$ divise à la fois $a$ et $b$) $\Leftrightarrow$ ($d$ divise à la fois $b$ et $a\%b$)
  - En particulier, PGCD( $a$ , $b$ ) = PGCD( $b$ , $a\%b$ )

- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| PGCD(4,6) = 2 | car | $4 = 2 \times 2$ | et | $6 = 2 \times 3$ |
| PGCD(10,15) = 5 | car | $10 = 5 \times 2$ | et | $15 = 5 \times 3$ |
| PGCD(0,8) = 8 | car | $0 = 8 \times 0$ | et | $8 = 8 \times 1$ |

- L'algorithme d'Euclide calcule le PGCD de deux entiers naturels $a$ et $b$.
  - ($d$ divise à la fois $a$ et $b$) $\Leftrightarrow$ ($d$ divise à la fois $b$ et $a\%b$)
  - En particulier, PGCD( $a$ , $b$ ) = PGCD( $b$ , $a\%b$ )
- Calculons le PGCD de 135 et 72.

SHELL
```
>>>
```

PGCD(135,72) =
=
=
=

# Algorithme d'Euclide : principe

- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{PGCD}(4,6) = 2 & \text{car} & 4 = 2\times 2 & \text{et} & 6 = 2\times 3 \\ \mathrm{PGCD}(10,15) = 5 & \text{car} & 10 = 5\times 2 & \text{et} & 15 = 5\times 3 \\ \mathrm{PGCD}(0,8) = 8 & \text{car} & 0 = 8\times 0 & \text{et} & 8 = 8\times 1 \end{array}$$

- L'algorithme d'Euclide calcule le PGCD de deux entiers naturels $a$ et $b$.
  - ($d$ divise à la fois $a$ et $b$) $\Leftrightarrow$ ($d$ divise à la fois $b$ et $a\%b$)
  - En particulier, PGCD( $a$ , $b$ ) = PGCD( $b$ , $a\%b$ )
- Calculons le PGCD de 135 et 72.

SHELL

```
>>> 135%72
```

PGCD(135,72) =
=
=
=

- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| PGCD(4,6) = 2 | car | $4 = 2 \times 2$ | et | $6 = 2 \times 3$ |
| PGCD(10,15) = 5 | car | $10 = 5 \times 2$ | et | $15 = 5 \times 3$ |
| PGCD(0,8) = 8 | car | $0 = 8 \times 0$ | et | $8 = 8 \times 1$ |

- L'algorithme d'Euclide calcule le PGCD de deux entiers naturels $a$ et $b$.
  - ($d$ divise à la fois $a$ et $b$) $\Leftrightarrow$ ($d$ divise à la fois $b$ et $a\%b$)
  - En particulier, PGCD( $a$ , $b$ ) = PGCD( $b$ , $a\%b$ )
- Calculons le PGCD de 135 et 72.

SHELL
```
>>> 135%72
63
>>>
```

PGCD(135,72) = PGCD(72,63)
=
=
=

# Algorithme d'Euclide : principe

- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| PGCD(4,6) = 2 | car | $4 = 2 \times 2$ | et | $6 = 2 \times 3$ |
| PGCD(10,15) = 5 | car | $10 = 5 \times 2$ | et | $15 = 5 \times 3$ |
| PGCD(0,8) = 8 | car | $0 = 8 \times 0$ | et | $8 = 8 \times 1$ |

- L'algorithme d'Euclide calcule le PGCD de deux entiers naturels $a$ et $b$.
  - ($d$ divise à la fois $a$ et $b$) $\Leftrightarrow$ ($d$ divise à la fois $b$ et $a\%b$)
  - En particulier, PGCD( $a$ , $b$ ) = PGCD( $b$ , $a\%b$ )
- Calculons le PGCD de 135 et 72.

SHELL
```
>>> 135%72
63
>>> 72%63
```

| | | |
|---|---|---|
| PGCD(135,72) | = | PGCD(72,63) |
| | = | |
| | = | |
| | = | |

# Algorithme d'Euclide : principe

- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| PGCD(4,6) = 2 | car | $4 = 2 \times 2$ | et | $6 = 2 \times 3$ |
| PGCD(10,15) = 5 | car | $10 = 5 \times 2$ | et | $15 = 5 \times 3$ |
| PGCD(0,8) = 8 | car | $0 = 8 \times 0$ | et | $8 = 8 \times 1$ |

- L'algorithme d'Euclide calcule le PGCD de deux entiers naturels $a$ et $b$.
  - ($d$ divise à la fois $a$ et $b$) $\Leftrightarrow$ ($d$ divise à la fois $b$ et $a\%b$)
  - En particulier, PGCD( $a$ , $b$ ) = PGCD( $b$ , $a\%b$ )
- Calculons le PGCD de 135 et 72.

SHELL
```
>>> 135%72
63
>>> 72%63
9
>>>
```

$$
\begin{aligned}
\text{PGCD}(135,72) &= \text{PGCD}(72,63) \\
&= \text{PGCD}(63,9) \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

# Algorithme d'Euclide : principe

- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

$$\begin{array}{llllll} \text{PGCD}(4,6) = 2 & \text{car} & 4 = 2\times 2 & \text{et} & 6 = 2\times 3 \\ \text{PGCD}(10,15) = 5 & \text{car} & 10 = 5\times 2 & \text{et} & 15 = 5\times 3 \\ \text{PGCD}(0,8) = 8 & \text{car} & 0 = 8\times 0 & \text{et} & 8 = 8\times 1 \end{array}$$

- L'algorithme d'Euclide calcule le PGCD de deux entiers naturels $a$ et $b$.
  - ($d$ divise à la fois $a$ et $b$) $\Leftrightarrow$ ($d$ divise à la fois $b$ et $a\%b$)
  - En particulier, PGCD( $a$ , $b$ ) = PGCD( $b$ , $a\%b$ )
- Calculons le PGCD de 135 et 72.

SHELL
```
>>> 135%72
63
>>> 72%63
9
>>> 63%9
```

$$\begin{array}{lcl} \text{PGCD}(135,72) & = & \text{PGCD}(72,63) \\ & = & \text{PGCD}(63,9) \\ & = & \\ & = & \end{array}$$

# Algorithme d'Euclide : principe



- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| PGCD(4,6) = 2 | car | $4 = 2 \times 2$ | et | $6 = 2 \times 3$ |
| PGCD(10,15) = 5 | car | $10 = 5 \times 2$ | et | $15 = 5 \times 3$ |
| PGCD(0,8) = 8 | car | $0 = 8 \times 0$ | et | $8 = 8 \times 1$ |

- L'algorithme d'Euclide calcule le PGCD de deux entiers naturels $a$ et $b$.
  - ($d$ divise à la fois $a$ et $b$) $\Leftrightarrow$ ($d$ divise à la fois $b$ et $a\%b$)
  - En particulier, PGCD( $a$ , $b$ ) = PGCD( $b$ , $a\%b$ )
- Calculons le PGCD de 135 et 72.

SHELL
```
>>> 135%72
63
>>> 72%63
9
>>> 63%9
0
```

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PGCD}(135,72) &= \mathrm{PGCD}(72,63)\\
&= \mathrm{PGCD}(63,9)\\
&= \mathrm{PGCD}(9,0)\\
&=
\end{aligned}
$$

# Algorithme d'Euclide : principe



- On s'intéresse au PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels.

$$\begin{array}{lcccc} \text{PGCD}(4,6) = 2 & \text{car} & 4 = 2 \times 2 & \text{et} & 6 = 2 \times 3 \\ \text{PGCD}(10,15) = 5 & \text{car} & 10 = 5 \times 2 & \text{et} & 15 = 5 \times 3 \\ \text{PGCD}(0,8) = 8 & \text{car} & 0 = 8 \times 0 & \text{et} & 8 = 8 \times 1 \end{array}$$

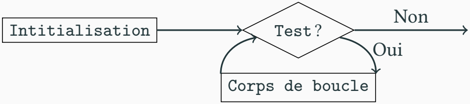
- L'algorithme d'Euclide calcule le PGCD de deux entiers naturels $a$ et $b$.
  - ($d$ divise à la fois $a$ et $b$) $\Leftrightarrow$ ($d$ divise à la fois $b$ et $a\%b$)
  - En particulier, PGCD( $a$ , $b$ ) = PGCD( $b$ , $a\%b$ )
- Calculons le PGCD de 135 et 72.

SHELL

```
>>> 135%72
63
>>> 72%63
9
>>> 63%9
0
```

$$\begin{array}{lcl} \text{PGCD}(135,72) & = & \text{PGCD}(72,63) \\ & = & \text{PGCD}(63,9) \\ & = & \text{PGCD}(9,0) \\ & = & 9 \end{array}$$

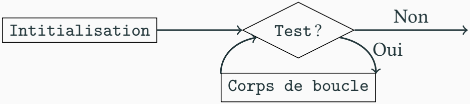
PGCD(135,72) = PGCD(72,63) = PGCD(63,9) = PGCD(9,0) = 9



# Algorithme d'Euclide : analyse



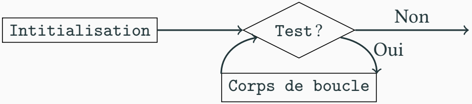
PGCD(135,72) = PGCD(72,63) = PGCD(63,9) = PGCD(9,0) = 9




De quelles variables a-t-on besoin ?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 135 | 72 | 63 | 9 |
| b | 72 | 63 | 9 | 0 |

PGCD(135,72) = PGCD(72,63) = PGCD(63,9) = PGCD(9,0) = 9




De quelles variables a-t-on besoin ?

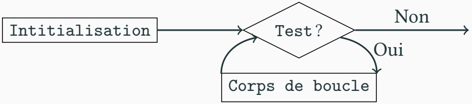
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 135 | 72 | 63 | 9 |
| b | 72 | 63 | 9 | 0 |

- Initialisation : *a* et *b* sont des données du problèmes

# Algorithme d'Euclide : analyse



PGCD(135,72) = PGCD(72,63) = PGCD(63,9) = PGCD(9,0) = 9




De quelles variables a-t-on besoin ?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 135 | 72 | 63 | 9 |
| b | 72 | 63 | 9 | 0 |

- Initialisation : $a$ et $b$ sont des données du problèmes
- Corps de boucle :

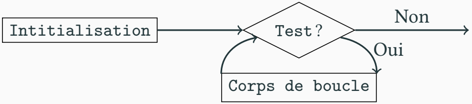
SCRIPT

```
a = b   # Faux !
b = a%b # Pourquoi ?
```

# Algorithme d'Euclide : analyse



PGCD(135,72) = PGCD(72,63) = PGCD(63,9) = PGCD(9,0) = 9




De quelles variables a-t-on besoin ?

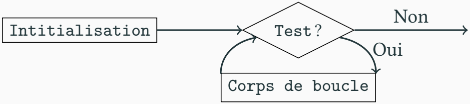
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 135 | 72 | 63 | 9 |
| b | 72 | 63 | 9 | 0 |

- Initialisation : $a$ et $b$ sont des données du problèmes
- Corps de boucle :

SCRIPT
```
a = b    # Faux !
b = a%b  # Pourquoi ?
```

SCRIPT
```
temp=a%b
a = b
b = temp
```

PGCD(135,72) = PGCD(72,63) = PGCD(63,9) = PGCD(9,0) = 9




De quelles variables a-t-on besoin ?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 135 | 72 | 63 | 9 |
| b | 72 | 63 | 9 | 0 |

- Initialisation : *a* et *b* sont des données du problèmes
- Corps de boucle :

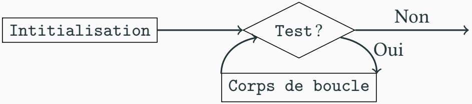
SCRIPT
```
a = b    # Faux !
b = a%b  # Pourquoi ?
```

SCRIPT
```
temp=a%b
a = b
b = temp
```

- Test : on continue tant que `b!=0`

# Algorithme d'Euclide : analyse

PGCD(135,72) = PGCD(72,63) = PGCD(63,9) = PGCD(9,0) = 9




De quelles variables a-t-on besoin ?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 135 | 72 | 63 | 9 |
| b | 72 | 63 | 9 | 0 |

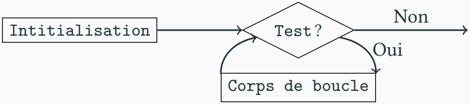
- Initialisation : $a$ et $b$ sont des données du problèmes
- Corps de boucle :

SCRIPT
```
a = b    # Faux !
b = a%b  # Pourquoi ?
```

SCRIPT
```
temp=a%b
a = b
b = temp
```

- Test : on continue tant que `b!=0`
  - `b` est un entier naturel qui décroit strictement

PGCD(135,72) = PGCD(72,63) = PGCD(63,9) = PGCD(9,0) = 9




De quelles variables a-t-on besoin ?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 135 | 72 | 63 | 9 |
| b | 72 | 63 | 9 | 0 |

- Initialisation : *a* et *b* sont des données du problèmes
- Corps de boucle :

SCRIPT
```
a = b    # Faux !
b = a%b  # Pourquoi ?
```

SCRIPT
```
temp=a%b
a = b
b = temp
```

- Test : on continue tant que `b!=0`
  - `b` est un entier naturel qui décroit strictement
  - `b` finira toujours par être égale à 0 : le programme s'arrêtera !

# Algorithme d'Euclide : programme

SCRIPT

```
def PGCD(a,b): # on suppose a,b entiers >= 0
    while b != 0:
        temp = a%b
        a = b
        b = temp
        print('a =',a, 'b =', b) # Pour voir !
    return a
```

SHELL

```
>>>
```

# Algorithme d'Euclide : programme

SCRIPT

```
def PGCD(a,b): # on suppose a,b entiers >= 0
    while b != 0:
        temp = a%b
        a = b
        b = temp
        print('a =',a, 'b =', b) # Pour voir !
    return a
```

SHELL

```
>>> PGCD(38160,33000)
```

# Algorithme d'Euclide : programme

SCRIPT

```python
def PGCD(a,b): # on suppose a,b entiers >= 0
    while b != 0:
        temp = a%b
        a = b
        b = temp
        print('a =',a, 'b =', b) # Pour voir !
    return a
```

SHELL

```
>>> PGCD(38160,33000)
a = 33000 b = 5160
a = 5160 b = 2040
a = 2040 b = 1080
a = 1080 b = 960
a = 960 b = 120
a = 120 b = 0
120
```

- Problème récréatif de Leonardo Fibonacci (1202)

*Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?*

- Problème récréatif de Leonardo Fibonacci (1202)

*Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?*

- On note $F(n)$ le nombre de lapins au début du mois $n$.
- Pour tout $n > 1$, on a $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$

Nouvelle génération = anciens adultes + nouveaux adultes

- Problème récréatif de Leonardo Fibonacci (1202)

*Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?*

- On note $F(n)$ le nombre de lapins au début du mois $n$.
- Pour tout $n > 1$, on a $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$

Nouvelle génération = anciens adultes + nouveaux adultes

- On voit de manière assez évidente que :

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

- Problème récréatif de Leonardo Fibonacci (1202)

*Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?*

- On note $F(n)$ le nombre de lapins au début du mois $n$.
- Pour tout $n > 1$, on a $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$

Nouvelle génération = anciens adultes + nouveaux adultes

- On voit de manière assez évidente que :

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

- Mais on souhaite éviter les flottants.

# Fibonacci : méthode récursive et naïve

SCRIPT

```
def F(n): # Version récursive
    print('Je calcule F(n) pour n=',n) #Voyons...
    if n==1 or n==2:
        return 1
    else:
        return F(n-1) + F(n-2)
```

SHELL

```
>>>
```

# Fibonacci : méthode récursive et naïve

SCRIPT

```python
def F(n): # Version récursive
    print('Je calcule F(n) pour n=',n) #Voyons...
    if n==1 or n==2:
        return 1
    else:
        return F(n-1) + F(n-2)
```

SHELL

```
>>> F(6)
```

# Fibonacci : méthode récursive et naïve

SCRIPT

```
def F(n): # Version récursive
    print('Je calcule F(n) pour n=',n) #Voyons...
    if n==1 or n==2:
        return 1
    else:
        return F(n-1) + F(n-2)
```

SHELL

```
>>> F(6)
Je calcule F(n) pour n= 6
Je calcule F(n) pour n= 5
Je calcule F(n) pour n= 4
Je calcule F(n) pour n= 3
Je calcule F(n) pour n= 2
Je calcule F(n) pour n= 1
Je calcule F(n) pour n= 2
Je calcule F(n) pour n= 3
Je calcule F(n) pour n= 2
Je calcule F(n) pour n= 1
Je calcule F(n) pour n= 4
Je calcule F(n) pour n= 3
Je calcule F(n) pour n= 2
Je calcule F(n) pour n= 1
Je calcule F(n) pour n= 2
8
```

SCRIPT

```python
def F(n): # Version récursive
    print('Je calcule F(n) pour n=',n) #Voyons...
    if n==1 or n==2:
        return 1
    else:
        return F(n-1) + F(n-2)
```

SHELL

```
>>> F(6)
Je calcule F(n) pour n= 6
Je calcule F(n) pour n= 5
Je calcule F(n) pour n= 4
Je calcule F(n) pour n= 3
Je calcule F(n) pour n= 2
Je calcule F(n) pour n= 1
Je calcule F(n) pour n= 2
Je calcule F(n) pour n= 3
Je calcule F(n) pour n= 2
Je calcule F(n) pour n= 1
Je calcule F(n) pour n= 4
Je calcule F(n) pour n= 3
Je calcule F(n) pour n= 2
Je calcule F(n) pour n= 1
Je calcule F(n) pour n= 2
8
```

Peu efficace

- On calcule de nombreuses fois la même chose.
- Solution possible : voir cours 7 (mémoïsation)

On souhaite calculer $F(N)$.
L'astuce est d'utiliser deux variables `a` et `b`.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(n)$ | a | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 |
| $F(n-1)$ | b | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 |
| $n$ | n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

On souhaite calculer $F(N)$.
L'astuce est d'utiliser deux variables `a` et `b`.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(n)$ | a | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 |
| $F(n-1)$ | b | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 |
| $n$ | n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Initialisation

SCRIPT
```
a = 1
b = 1
n = 2
```

On souhaite calculer $F(N)$.
L'astuce est d'utiliser deux variables a et b.

| $F(n)$ | a | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(n-1)$ | b | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 |
| $n$ | n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Initialisation

SCRIPT
```
a = 1
b = 1
n = 2
```

- Corps de boucle. On utilise un invariant de boucle $a = F(n)$ et $b = F(n-1)$

SCRIPT
```
# a==F(n) et b==F(n-1)
temp = a+b          # temp == F(n+1)
b = a               # b == F(n)
a = temp            # a == F(n+1)
# a==F(n+1) et b==F(n)
n = n+1
# a==F(n) et b==F(n-1)
```

On souhaite calculer $F(N)$.
L'astuce est d'utiliser deux variables `a` et `b`.

| $F(n)$ | a | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(n-1)$ | b | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 |
| $n$ | n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Initialisation

```
a = 1
b = 1
n = 2
```

SCRIPT

- Corps de boucle. On utilise un invariant de boucle $a = F(n)$ et $b = F(n-1)$

```
# a==F(n) et b==F(n-1)
temp = a+b          # temp == F(n+1)
b = a               # b == F(n)
a = temp            # a == F(n+1)
# a==F(n+1) et b==F(n)
n = n+1
# a==F(n) et b==F(n-1)
```

SCRIPT

- On continue tant que `n<N`.

# Fibonacci : méthode itérative et efficace

- Il suffit d'écire le code...

SCRIPT

```
def F(N):
    a = 1
    b = 1
    n = 2
    while n < N:
        temp = a+b
        b = a
        a = temp
        n = n+1
    return a
```

- Il suffit d'écire le code...

SCRIPT
```
def F(N):
    a = 1
    b = 1
    n = 2
    while n < N:
        temp = a+b
        b = a
        a = temp
        n = n+1
    return a
```

- ...et apprécier la vitesse et l'efficacité de cette méthode !

SHELL
```
>>>
```

- Il suffit d'écire le code…

SCRIPT
```
def F(N):
    a = 1
    b = 1
    n = 2
    while n < N:
        temp = a+b
        b = a
        a = temp
        n = n+1
    return a
```

- …et apprécier la vitesse et l'efficacité de cette méthode !

SHELL
```
>>> F(8)
```

# Fibonacci : méthode itérative et efficace

- Il suffit d'écire le code...

SCRIPT

```python
def F(N):
    a = 1
    b = 1
    n = 2
    while n < N:
        temp = a+b
        b = a
        a = temp
        n = n+1
    return a
```

- ...et apprécier la vitesse et l'efficacité de cette méthode !

SHELL

```
>>> F(8)
21
>>>
```

# Fibonacci : méthode itérative et efficace

- Il suffit d'écire le code...

SCRIPT
```
def F(N):
    a = 1
    b = 1
    n = 2
    while n < N:
        temp = a+b
        b = a
        a = temp
        n = n+1
    return a
```

- ...et apprécier la vitesse et l'efficacité de cette méthode !

SHELL
```
>>> F(8)
21
>>> F(378)
```

- Il suffit d'écire le code...

SCRIPT

```
def F(N):
    a = 1
    b = 1
    n = 2
    while n < N:
        temp = a+b
        b = a
        a = temp
        n = n+1
    return a
```

- ...et apprécier la vitesse et l'efficacité de cette méthode !

SHELL

```
>>> F(8)
21
>>> F(378)
444470572323423749883397351998290851993343081863640916635139
7897095281987215864
```

On considère la suite $u_n$ arithmético-géométrique définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 & = 234 \\ u_{n+1} & = -\frac{8}{10} u_n + 3 \end{cases}$$

- Écrire une fonction avec une boucle while pour calculer $u_n$.

On considère la suite $u_n$ arithmético-géométrique définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 & = 234 \\ u_{n+1} & = -\frac{8}{10} u_n + 3 \end{cases}$$

- Écrire une fonction avec une boucle while pour calculer $u_n$.
- Sa limite est $\ell = \frac{5}{3}$. Faire une boucle qui s'arrête lorsque $|u_n - \ell| < 10^{-5}$

# Sommaire

- La commande `return` provoque la sortie immédiate d'une fonction
  - même à l'intérieur d'une boucle.

SCRIPT

```
def div4(n):
    i = n
    while i < n+4:
        if i%4 == 0:
            return i
        i = i+1
    print('Inutile')
```

SHELL

```
>>>
```

- La commande `return` provoque la sortie immédiate d'une fonction
  - même à l'intérieur d'une boucle.

SCRIPT

```python
def div4(n):
    i = n
    while i < n+4:
        if i%4 == 0:
            return i
        i = i+1
    print('Inutile')
```

SHELL

```
>>> div4(13)
```

# Sortie de boucle

- La commande `return` provoque la sortie immédiate d'une fonction
  - même à l'intérieur d'une boucle.

SCRIPT

```python
def div4(n):
    i = n
    while i < n+4:
        if i%4 == 0:
            return i
        i = i+1
    print('Inutile')
```

SHELL

```
>>> div4(13)
16
>>>
```

- La commande `return` provoque la sortie immédiate d'une fonction
  - même à l'intérieur d'une boucle.

SCRIPT

```python
def div4(n):
    i = n
    while i < n+4:
        if i%4 == 0:
            return i
        i = i+1
    print('Inutile')
```

SHELL

```
>>> div4(13)
16
>>> div4(144)
```

- La commande `return` provoque la sortie immédiate d'une fonction
  - même à l'intérieur d'une boucle.

SCRIPT
```python
def div4(n):
    i = n
    while i < n+4:
        if i%4 == 0:
            return i
        i = i+1
    print('Inutile')
```

SHELL
```
>>> div4(13)
16
>>> div4(144)
144
```

- La commande `return` provoque la sortie immédiate d'une fonction
  - même à l'intérieur d'une boucle.

SCRIPT
```python
def div4(n):
    i = n
    while i < n+4:
        if i%4 == 0:
            return i
        i = i+1
    print('Inutile')
```

SHELL
```
>>> div4(13)
16
>>> div4(144)
144
```

- La commande `break` provoque la sortie de la boucle, l'exécution se poursuit.

SCRIPT
```python
def div5(n):
    i = n
    while i < n+5:
        if i%5 == 0:
            break
        i = i+1
    print('Sortie')
    return i
```

SHELL
```
>>>
```

- La commande `return` provoque la sortie immédiate d'une fonction
  - même à l'intérieur d'une boucle.

SCRIPT
```python
def div4(n):
    i = n
    while i < n+4:
        if i%4 == 0:
            return i
        i = i+1
    print('Inutile')
```

SHELL
```
>>> div4(13)
16
>>> div4(144)
144
```

- La commande `break` provoque la sortie de la boucle, l'exécution se poursuit.

SCRIPT
```python
def div5(n):
    i = n
    while i < n+5:
        if i%5 == 0:
            break
        i = i+1
    print('Sortie')
    return i
```

SHELL
```
>>> div5(13)
```

- La commande `return` provoque la sortie immédiate d'une fonction
  - même à l'intérieur d'une boucle.

SCRIPT
```python
def div4(n):
    i = n
    while i < n+4:
        if i%4 == 0:
            return i
        i = i+1
    print('Inutile')
```

SHELL
```
>>> div4(13)
16
>>> div4(144)
144
```

- La commande `break` provoque la sortie de la boucle, l'exécution se poursuit.

SCRIPT
```python
def div5(n):
    i = n
    while i < n+5:
        if i%5 == 0:
            break
        i = i+1
    print('Sortie')
    return i
```

SHELL
```
>>> div5(13)
Sortie
15
>>>
```

- La commande `return` provoque la sortie immédiate d'une fonction
  - même à l'intérieur d'une boucle.

SCRIPT
```python
def div4(n):
    i = n
    while i < n+4:
        if i%4 == 0:
            return i
        i = i+1
    print('Inutile')
```

SHELL
```
>>> div4(13)
16
>>> div4(144)
144
```

- La commande `break` provoque la sortie de la boucle, l'exécution se poursuit.

SCRIPT
```python
def div5(n):
    i = n
    while i < n+5:
        if i%5 == 0:
            break
        i = i+1
    print('Sortie')
    return i
```

SHELL
```
>>> div5(13)
Sortie
15
>>> div5(145)
```

- La commande `return` provoque la sortie immédiate d'une fonction
  - même à l'intérieur d'une boucle.

SCRIPT
```
def div4(n):
    i = n
    while i < n+4:
        if i%4 == 0:
            return i
        i = i+1
    print('Inutile')
```

SHELL
```
>>> div4(13)
16
>>> div4(144)
144
```

- La commande `break` provoque la sortie de la boucle, l'exécution se poursuit.

SCRIPT
```
def div5(n):
    i = n
    while i < n+5:
        if i%5 == 0:
            break
        i = i+1
    print('Sortie')
    return i
```

SHELL
```
>>> div5(13)
Sortie
15
>>> div5(145)
Sortie
145
```

Déconseillé au moins de 18 ans.

## Déconseillé au moins de 18 ans.

- En utilisant le `break`, on peut se passer de test dans la boucle `while` !

SCRIPT

```
n = 40
while True:
    if n%7 == 0:
        break
    n = n+1
    print('n=',n)
```

# Déconseillé au moins de 18 ans.

- En utilisant le `break`, on peut se passer de test dans la boucle `while` !

SCRIPT

```
n = 40
while True:
    if n%7 == 0:
        break
    n = n+1
    print('n=',n)
```

- Pratique dangereuse, à ne pas utiliser sans bonnes raisons.

- Pour deux entiers naturels `a` et `n` on veut calculer $\texttt{a}^{\texttt{n}}$ , sans utiliser `**`.

- Pour deux entiers naturels $\mathtt{a}$ et $\mathtt{n}$ on veut calculer $\mathtt{a}^{\mathtt{n}}$ , sans utiliser `**`.
- Version récursive Idée : $\mathtt{a}^{\mathtt{n}} = \mathtt{a} \times \mathtt{a}^{\mathtt{n}-1}$ et $\mathtt{a}^0 = 1$

SCRIPT

```
def puissance(a,n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return a * puissance(a, n-1)
```

- Pour deux entiers naturels $a$ et $n$ on veut calculer $a^n$ , sans utiliser `**`.
- Version récursive Idée : $a^n = a \times a^{n-1}$ et $a^0 = 1$

SCRIPT

```
def puissance(a,n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return a * puissance(a, n-1)
```

- Version itérative.

SCRIPT

```
def puissance(a,n):
    i = 0
    p = 1 # p initialisé à a^0
    while i < n:
        p = a*p
        i = i+1 # p == a^i
    return p # i == n et p == a^i donc p == a^n
```

$$a^{21} \quad = \quad a^{2\times 10+1} \quad = \quad a \times \left(a^{10}\right)^2$$

$$\begin{aligned} a^{21} &= a^{2\times 10+1} &&= a\times\left(a^{10}\right)^2 \\ a^{10} &= a^{2\times 5+0} &&= \left(a^{5}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} a^{21} & = & a^{2\times 10+1} & = & a\times\left(a^{10}\right)^2 \\ a^{10} & = & a^{2\times 5+0} & = & \left(a^{5}\right)^2 \\ a^{5} & = & a^{2\times 2+1} & = & a\times\left(a^{2}\right)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccr}
a^{21} & = & a^{2\times 10+1} & = & a\times\left(a^{10}\right)^2 \\
a^{10} & = & a^{2\times 5+0} & = & \left(a^{5}\right)^2 \\
a^{5} & = & a^{2\times 2+1} & = & a\times\left(a^{2}\right)^2 \\
a^{2} & = & a^{2\times 1+0} & = & \left(a^{1}\right)^2
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
a^{21} &= a^{2\times 10+1} &= a\times\left(a^{10}\right)^2\\
a^{10} &= a^{2\times 5+0} &= \left(a^{5}\right)^2\\
a^{5} &= a^{2\times 2+1} &= a\times\left(a^{2}\right)^2\\
a^{2} &= a^{2\times 1+0} &= \left(a^{1}\right)^2\\
a^{1} &= a^{2\times 0+1} &= a\times\left(a^{0}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{ccccc}
a^{21} & = & a^{2\times 10+1} & = & a\times\left(a^{10}\right)^2 \\
a^{10} & = & a^{2\times 5+0} & = & \left(a^{5}\right)^2 \\
a^{5} & = & a^{2\times 2+1} & = & a\times\left(a^{2}\right)^2 \\
a^{2} & = & a^{2\times 1+0} & = & \left(a^{1}\right)^2 \\
a^{1} & = & a^{2\times 0+1} & = & a\times\left(a^{0}\right)^2
\end{array}$$

- $a^0 = 1$
- $n$ pair : $a^n = \left(a^{n//2}\right)^2$
- $n$ impair : $a^n = a\times\left(a^{n//2}\right)^2$

$$\begin{array}{ccccc} a^{21} & = & a^{2\times10+1} & = & a\times\left(a^{10}\right)^2 \\ a^{10} & = & a^{2\times5+0} & = & \left(a^{5}\right)^2 \\ a^{5} & = & a^{2\times2+1} & = & a\times\left(a^{2}\right)^2 \\ a^{2} & = & a^{2\times1+0} & = & \left(a^{1}\right)^2 \\ a^{1} & = & a^{2\times0+1} & = & a\times\left(a^{0}\right)^2 \end{array}$$

- $a^0 = 1$
- $n$ pair : $a^n = \left(a^{n//2}\right)^2$
- $n$ impair : $a^n = a\times\left(a^{n//2}\right)^2$

- Beaucoup moins d'opérations !

$$a^{21} \to a^{10} \to a^{5} \to a^{2} \to a^{1} \to a^{0}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
a^{21} & = & a^{2\times 10+1} & = & a\times\left(a^{10}\right)^2 \\
a^{10} & = & a^{2\times 5+0} & = & \left(a^{5}\right)^2 \\
a^{5} & = & a^{2\times 2+1} & = & a\times\left(a^{2}\right)^2 \\
a^{2} & = & a^{2\times 1+0} & = & \left(a^{1}\right)^2 \\
a^{1} & = & a^{2\times 0+1} & = & a\times\left(a^{0}\right)^2
\end{array}
$$

- $a^0 = 1$
- $n$ pair : $a^n = \left(a^{n//2}\right)^2$
- $n$ impair : $a^n = a\times\left(a^{n//2}\right)^2$

- Beaucoup moins d'opérations !

$$a^{21} \to a^{10} \to a^{5} \to a^{2} \to a^{1} \to a^{0}$$

SCRIPT

```python
def puissance_rapide(a,n):
    if n == 0:
        return 1
    elif n%2 == 0:
        return puissance_rapide(a, n//2) ** 2
    else:
        return a * puissance_rapide(a, n//2) ** 2
```

# Merci pour votre attention
## Questions

?

# Cours 2 — Boucles while et récursions